

PLATITUDE GEOMETRIQUE ET CLASSES FONDAMENTALES RELATIVES PONDEREES I.

MOHAMED KADDAR

Abstract. Let X and S be complex spaces with X countable at infinity and S locally finite reduced pure dimensional. Let $\pi : X \rightarrow S$ be an open morphism with constant pure n -dimensional fibers (we call such morphism universally- n -equidimensional). If there is a cycle \mathfrak{X} of $X \times S$ such that, his support coincide fiberwise set-theoretically with the fibers of π and endowed this with a good multiplicities in such a way that $(\pi^{-1}(s))_{s \in S}$ becomes a local analytic (resp. continuous) family of cycles in the sense of [B.M], we say that π is analytically geometrically flat (resp. continuously geometrically flat) according to the weight \mathfrak{X} . The purpose of this article is to give a sheaf-theoretic characterization of analytically geometrically flat maps. One of many results obtained in this work say that an universally- n -equidimensional morphism is analytically geometrically flat if and only if admit a weighted relative fundamental class morphism satisfies many nice functorial properties which giving, for a finite Tor-dimensional morphism or in the embedding case, the relative fundamental class of Angeniol-Elzein [E.A] or Barlet [B4]. From this, we deduce that universally- n -equidimensional morphism are analytically geometrically flat if and only if there exist a Kunz-Waldi sheaf of regular meromorphic relative forms which is compatible with arbitrary base change between reduced complex spaces. We have the algebraic statement :

Let X and S be reduced (or more generally with no embedded points) locally noetherian schemes of finite Krull dimension with S excellent on field k of characteristic 0 . Let $\pi : X \rightarrow S$ be a finite type, universally open with n - pure dimensional fibers (generically smooth) morphism. Then the Kunz- Waldi relative sheaf of meromorphic regular forms, $\tilde{\omega}_{X/S}^n$, is compatible with any base change between k -schemes like S if and only if π define an algebraic family of n -cycles parametrized by S .

AMS Classification (2000): 32C15, 32C30, 32C35, 32C37, 14C05.

Key words: Analytic spaces, Integration, cohomology, dualizing sheaves.

Table des matières:

§0. Introduction et énoncé des résultats	3
§1. Notion de morphisme continûment et analytiquement géométriquement plat	
1.0. Terminologie relative à l'espace des cycles.	13
1.1. Quelques exemples.	27
1.2. Sur quelques notions fondamentales.	30
1.3. Platitude géométrique.	36
1.4. Quelques petits résultats.	47
1.5. Analogie avec la platitude algébrique.	50
§2. Morphisme géométriquement plat et intégration	
2.0. Position du problème et théorème de Reiffen.	51
2.1. Classes de cohomologie et représentant $\bar{\partial}$ -fermé sur un espace singulier	52
2.2. Morphisme universellement ouvert adapté à l'intégration.	54
2.3. Propriétés fonctorielles de l'intégration sur les fibres d'un morphisme géométriquement plat.	57
§3. Faisceaux dualisants, formes régulières et méromorphes régulières: cas absolu et relatif.	
3.0. Faisceaux dualisants.	60
3.1. Formes régulières et méromorphes régulières: cadre algébrique.	61
3.2. Formes régulières et méromorphes régulières: cadre analytique.	65
§4. Classe fondamentale: cas absolu et relatif.	
4.0. Cas absolu.	77
4.1. Cas relatif.	80
§5. Quelques petits résultats utiles.	84
§6. Bibliographie	86

§0. *INTRODUCTION.*

0.0. Soient n un entier et S un espace analytique complexe réduit de dimension pure. Notons $\mathcal{E}(S, n)$ (resp. $\mathcal{G}_a(S, n)$) l'ensemble des morphismes $\pi : X \rightarrow S$ ouverts et à fibres de dimension pure n avec X dénombrable à l'infini (resp. les morphismes analytiquement géométriquement plats c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{E}(S, n)$ munis d'un cycle poids de $S \times X$ induisant des multiplicités convenables sur les fibres pour en faire une famille analytique (locale) de cycles au sens de [B1],[B.M])⁽⁰⁾. $\mathcal{G}_a(S, n)$ forme une classe de morphismes particulièrement intéressante puisqu'elle contient les morphismes plats et plus généralement ceux de Tor-dimension finie, elle est stable par changement de base entre espaces complexes réduits et de nature locale sur X et S . De plus dans toute factorisation locale de π (par rapport à l'une quelconque de ses fibres) en un morphisme fini et surjectif suivi d'une projection lisse sur la base, le morphisme fini est toujours analytiquement géométriquement plat. Remarquons au passage que cette propriété est vérifiée par les morphismes de Tor-dimension finie, mais pas par les plats car sinon les fibres seraient toujours de Cohen-Macaulay ! Signalons que cette classe n'est toutefois pas stable pour la composition des morphismes et rend, de ce fait, difficile l'élaboration d'une théorie de l'intersection avec paramètre général.

L'objectif premier de cet article est de donner une caractérisation simple des éléments de $\mathcal{G}_a(S, n)$ qui va s'exprimer aussi bien en terme de morphisme d'*intégration* (opération de nature globale) ou en terme de morphismes *trace* (opération de nature purement locale). Tout ceci passe par la mise en évidence de deux faisceaux particulièrement importants, l'un pouvant apparaitre comme l'avatar local de l'autre.

Pour cela, on montre, dans un premier temps (cf théorème 1), qu'à tout élément π de $\mathcal{E}(S, n)$ est canoniquement associé un faisceau \mathcal{O}_X -cohérent, ω_π^n , de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S , munissant π d'une flèche mystérieuse $\mathbb{R}^n \pi_! \omega_\pi^n \rightarrow \mathcal{O}_S$ de formation compatible aux restrictions ouvertes sur X et S , stable par changement de base plat et coïncidant, pour π propre, grâce à la dualité analytique relative de Ramis-Ruget-Verdier ([R.R.V]) et à l'isomorphisme de Verdier ([Ve]), avec $\mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$ qui est le n -ème faisceau d'homologie du complexe à cohomologie cohérente $\pi^!(\mathcal{O}_S)$.

On prouve, alors (cf théorème 2), qu'un élément π de $\mathcal{E}(S, n)$ muni d'un certain

⁽⁰⁾ Les éléments de $\mathcal{E}(S, n)$ seront appelés par la suite *universellement n -équidimensionnels*. Nous insistons sur le terme *analytiquement* car, dans ce qui suit, se dégagera naturellement la notion de *continûment géométriquement plat* dont la classe sera notée $\mathcal{G}_c(S, n)$.

cycle poids \mathfrak{X} est dans $\mathcal{G}_a(S, n)$ si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(1) il existe un unique morphisme d'intégration $\int_{\pi, \mathfrak{X}} : \mathbb{R}^n \pi_! \Omega_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{O}_S$, continu relativement aux structures **Q.F.S** et **F.S** dont on peut munir ces groupes de co-homologies, compatible à l'additivité des pondérations \mathfrak{X} , stable par changement de base entre espaces complexes réduits et donnant, en particulier, l'intégration usuelle dans le cas absolu.

(2) il existe un unique morphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}} : \Omega_{X/S}^n \rightarrow \omega_{\pi}^n$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i) il est de formation compatible à l'additivité des pondérations, aux changement de base réduit et satisfait *la propriété de la trace relative*,

(ii) il induit un morphisme de complexes différentiels gradués

$$\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}}^{\bullet} : \Omega_{X/S}^{\bullet} \rightarrow \omega_{\pi}^{\bullet}$$

(iii) • si \mathfrak{X} est la pondération standard, $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}}$ donne la classe fondamentale relative

de [B4],

• si \mathfrak{X} est la pondération algébrique (i.e si π est plat ou plus généralement de *Tor-dimension* finie), $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}}$ est le morphisme classe fondamentale relative de [A.E]

étendu à ce cadre.

Une conséquence importante de ces résultats donnée par le théorème 3 peut s'énoncer sous la forme suivante:

un morphisme π ouvert et à fibres de dimension pure n est analytiquement géométriquement plat si et seulement si le faisceau ω_{π}^n (défini dans le théorème 1) est stable par changement de base arbitraire entre espaces complexes réduits et caractérisé par la propriété de la trace relative.

Ainsi, si X est analytiquement géométriquement plat sur S , ω_{π}^n est non seulement stable par changement de base mais incarne parfaitement le faisceau des formes méromorphes régulières $\tilde{\omega}_{X/S}^n$.

Pour une discussion détaillée de ce qui va suivre, nous renvoyons le lecteur au §.3. Rappelons simplement que, dans le cadre algébrique Kunz et Waldi ([K.W]) ont construit, pour tout morphisme de schémas noethériens sans composantes immergées (par exemple réduits) $\pi : X \rightarrow S$ de type fini, n -équidimensionnel et génériquement lisse et tout entier $k \leq n$, des faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents $\tilde{\omega}_{X/S}^k$ entièrement caractérisés par la *propriété de la trace relative* et appelés faisceaux des k -formes *méromorphes régulières relatives*. De plus, pour π plat en caractéristique

nulle, on dispose d'un morphisme canonique $\mathcal{C}_\pi : \Omega_{X/S}^n \rightarrow \tilde{\omega}_{X/S}^n$ qui est le morphisme *classe fondamentale* de Elzein ([E]). Cela montre, que, dans cette situation particulière, le faisceau $\omega_{X/S}^n := \mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$ est exactement le faisceau de Kunz-Waldi des n -formes méromorphes régulières. Dès lors deux questions naturelles se posent à savoir:

- (a) *quelle est la plus large classe de morphismes satisfaisant les hypothèses de Kunz-Waldi et dans laquelle le faisceau $\omega_{X/S}^n$ s'identifie canoniquement à $\tilde{\omega}_{X/S}^n$?*
- (b) *dans cette classe quels sont les morphismes pour lesquels les faisceaux $\omega_{X/S}^n$ sont stables par changement de base arbitraire?*

La classe décrite par (a) n'est pas vide puisqu'elle contient, par exemple, les morphismes lisses ou plats, les morphismes sur une base S qui est un schéma régulier (cf [Y]) ou, un peu plus généralement, un schéma excellent sans composantes immergées et vérifiant la condition de prolongement \mathbf{S}_2 de Serre (cf [L.S]).

En ce qui concerne le changement de base, on peut dire que si X est plat sur S , $\omega_{X/S}^n$ est stable par tout changement de base. Dans le cas général, il ne l'est jamais à moins d'avoir un changement de base plat ou d'imposer des hypothèses fortes sur π ou sur la base S (on peut renvoyer le lecteur à [S] qui traite du cas d'un morphisme de Cohen-Macaulay).

Sachant que les espaces analytiques complexes sont excellents, notre construction nous suggère (toutes précautions gardées) l'énoncé algébrique suivant:

Soient X et S des schémas localement noethériens de dimension de Krull finie et sans composantes immergées sur un corps de caractéristique nulle avec S excellent et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, génériquement lisse et n -équidimensionnel. Alors $\tilde{\omega}_{X/S}^n$ est stable par changement de base arbitraire si et seulement si π définit une famille algébrique de n -cycles paramétrée par S .

On en déduira, évidemment, un morphisme canonique $\mathcal{C}_{X/S} : \Omega_{X/S}^n \rightarrow \tilde{\omega}_{X/S}^n$ coïncidant, si π est plat, avec le morphisme classe fondamentale de Elzein ([E]).

Dans le cadre de la géométrie analytique complexe locale, la construction des formes méromorphes régulières relatives, pour X réduit de dimension pure et plat sur S , est implicitement contenue dans [K.W]. Par des méthodes complètement différentes et avec des hypothèses plus générales, Kersken propose, dans un travail conséquent ([Ke], [Ke1]), une construction d'un complexe de formes régulières donnant le complexe des formes méromorphes régulières relatives de Kunz-Waldi dans le cas réduit et de dimension pure. Plus précisément, il montre que, pour tout morphisme plat $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ d'algèbres analytiques locales (avec \mathcal{A} non nécessairement réduite ni de dimension pure!), muni de l'algèbre différentielle $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet, d)$ des formes différentielles

relatives dotées de la différentielles relative usuelle, il existe un complexe différentiel de $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet, d)$ -modules $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{A}/\mathcal{P})$ s'exprimant au moyen d'un complexe de cousin relatif et dont la cohomologie de degré 0 donnée par $\text{Ker} : \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{A}/\mathcal{P})^{0,*} \rightarrow \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{A}/\mathcal{P})^{1,*}$ est le $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}, d)$ -module des formes (génériquement holomorphes) régulières $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet$. Signalons, au passage, que ce type de formes, dont la construction utilisent aussi les complexes résiduels dans un cadre algébrique, se trouvent dans les travaux de Elzein [E].

Si \mathcal{A} est réduite de dimension pure, ces formes régulières sont des formes méromorphes régulières au sens de Kunz-Waldi. Ainsi se trouvent définies, pour tout morphisme plat d'espaces analytiques complexes $\pi : X \rightarrow S$ et en tout degré k , des faisceaux $\omega_{X/S}^k$ de formes dites *régulières* qui, pour X réduit de dimension pure, coïncident avec les faisceaux de Kunz-Waldi $\tilde{\omega}_{X/S}^k$.

Si π est un morphisme propre d'espaces analytiques complexes dénombrables à l'infini de dimension localement finie ayant des fibres de dimension pure n , la dualité analytique relative de Ramis-Ruget-Verdier ([R.R.V]) permet de montrer que le faisceau \mathcal{O}_X -cohérent $\mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$ (qui est de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S) joue le rôle d'un faisceau de Grothendieck relatif. Il est, alors, facile de voir que, pour π plat, $\omega_{X/S}^n$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$ et, par la force des choses, aussi à $\tilde{\omega}_{X/S}^n$ si X est réduit de dimension pure.

Par essence, les faisceaux $\tilde{\omega}_{X/S}^n$ et $\omega_{X/S}^n$ sont, en général, de nature radicalement différente. Le premier, de nature locale puisque sa description s'exprime en terme de germes de paramétrisations locales, est parfaitement approprié pour une description “analytique” des multiplicités au moyen des morphismes résidus et le second, de nature globale, doit son existence à une intégration globale revêtant un certain caractère universel et d'aspect plus topologique.

Se débarrasser des hypothèses de platitude imposées par la construction de Kersken et de propreté, inhérente à la dualité relative analytique de Ramis-Ruget-Verdier nécessite de comprendre en profondeur la problématique qui nous occupe. On s'aperçoit que la généralisation repose fondamentalement sur une dualité relative partielle et une classe de morphismes dont la factorisation locale produise des morphismes traces.

L'un des intérêt du présent travail est de mettre clairement en évidence ces constats en proposant deux méthodes reposant, pour l'une, sur une approche globale et, pour l'autre, sur une approche locale. Nous avons volontairement commencer par développer la première, dans laquelle le morphisme d'intégration occupe une place centrale, pour assurer une certaine continuité avec [KIII] qui traite de la notion de *paire dualisante*; ce qui fait l'objet du *théorème 2*. Le *théorème 4*, quant à

lui, utilise l’approche locale partant de la situation plongée et de la classe fondamentale relative pondérée donnée par le *théorème 0* aboutissant au fait que, pour tout morphisme $\pi : X \rightarrow S$ n -analytiquement géométriquement plat d’espaces, il existe un (unique) faisceau \mathcal{O}_X -cohérent (unique à isomorphisme canonique près) $\Lambda_{X/S}^n$ sur X de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S , compatible aux changements de bases et tel que, en chaque point x de X en lequel π est plat, le germe $\Lambda_{X/S,x}^n$ coïncide avec le faisceau des formes méromorphes régulières relatives caractérisé par la propriété de la trace relative au sens de Kunz-Waldi-Kersken. De plus, le complexe $\Lambda_{X/S}^\bullet := \mathcal{H}om(\Omega_{X/S}^{n-\bullet}, \Lambda_{X/S}^n)$ est munie d’une différentielle non triviale D , faisant de $(\Lambda_{X/S}^\bullet, D)$ un complexe différentiel de $(\Omega_{X/S}^\bullet, d_{X/S})$ -modules. Comme on l’a déjà dit plus haut, la classe des morphismes analytiquement géométriquement plats contient strictement celle des morphismes plats d’espaces complexes réduits.

Pour mener à bien ce programme, on dispose de deux ingrédients essentiels à savoir :

- (a) le théorème de Reiffen ou une de ses variantes assurant l’annulation des faisceaux de cohomologie $\mathbb{R}^k \pi_* \mathcal{F}$, en tout degré $k > n$, et dont une conséquence est le lemme du découpage (cf [B2], [B.V] ou [K1])
- (b) une connaissance chirurgicale de l’intégration sur les cycles ou opération de Andréotti-Norguet (cf [A.N], [B.V] ou [K2]) et quelques techniques usuelles.

La stratégie consiste à localiser puis globaliser en recollant convenablement les données locales recueillies. Pour cela, on utilise les techniques de découpage des classes de cohomologie et installation locale du morphisme relativement à des écailles (ou cartes), pour nous ramener au cas où π est factorisé en un plongement σ dans Z lisse sur S de dimension relative $n + p$, suivi d’une projection lisse sur S (ou bien d’un morphisme fini sur un espace lisse sur S suivi d’une projection sur S). Dans une telle configuration locale où X est plongé avec la codimension p fibre par fibre dans Z , cette intégration accouche naturellement d’un morphisme $\mathcal{C}_\pi^\sigma : \sigma_* \Omega_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_{Z/S}^{n+p})$, vérifiant les propriétés de **(2)**. Par ailleurs, une version “pondérée” de [B4] donnée par le *théorème 0* du §.4) nous dit que, dans cette situation locale, π définit une famille analytique de cycles si et seulement si la famille génériquement holomorphe $(\pi^{-1}(s))_{s \in S}$ est représentée par une classe de cohomologie dans $H_{|X|}^p(Z, \Omega_{Z/S}^p)$, induisant la classe fondamentale de X_s pour chaque s fixé. Mais il est facile de voir qu’un tel objet caractérise et est caractérisé par la donnée d’un morphisme $\mathcal{C}_{X/S}^\sigma : \sigma_* \Omega_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{H}_{|X|}^p(\Omega_{Z/S}^{n+p})$ compatible aux changements de bases entre espaces complexes réduits et possédant la fameuse propriété de la trace. On vérifie, sans peine, que \mathcal{C}_π^σ est un relèvement naturel de $\mathcal{C}_{X/S}^\sigma$.

En procédant par recollement, on produit un morphisme global $\Omega_{X/S}^n \rightarrow \omega_\pi^n$ ayant toutes les propriétés voulues et induisant un morphisme de complexes différentiels $\mathcal{C}_\pi^\bullet : \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \omega_\pi^\bullet$ (avec différentielle non triviale sur ω_π^\bullet).

Il est facile de voir que, pour un morphisme plat ou plus généralement de *Tor-dimension finie* d'espaces complexes avec base réduite, notre construction généralise celle de [E] et [A.E].

Ce travail est composé de trois parties. Dans la première, on énonce les principaux résultats et donnons les notions fondamentales étayées de nombreux exemples et contre-exemples agrémentées de quelques petits résultats plus ou moins connus. La seconde est entièrement consacrée à la preuve des théorèmes et leurs conséquences annoncés précédemment. Dans la troisième, on examine, dans ce contexte, la notion de paire dualisante introduite par Kleinman ([Kl]).

0.1. Enoncés des principaux résultats.

Théorème 1. *Soit π un élément de $\mathcal{E}(S, n)$. Alors, il existe un unique faisceau de \mathcal{O}_X -modules ω_π^n , vérifiant :*

(i) Si $X \xrightarrow[\pi]{\sigma} Z \xrightarrow{q} S$ est une factorisation locale de π dans laquelle σ est un plongement local dans Z lisse sur S et de dimension relative $n + p$, alors

$$\omega_\pi^n \simeq \sigma^* \mathcal{E}xt^p(\sigma_* \mathcal{O}_X, \Omega_{Z/S}^{n+p})$$

(ii) Il est \mathcal{O}_X cohérent, de profondeur au moins deux fibres par fibres sur S

(iii) ω_π^n et $\Omega_{X/S}^n$ coïncident canoniquement sur la partie régulière du morphisme π .

(iv) Sa construction est compatible aux inclusions ouvertes sur X dans le sens suivant:

si $\pi_i : X_i \rightarrow S$, $i = 1, 2$ sont deux morphismes analytiques universellement n -équidimensionnels et U un ouvert de X_1 muni de deux inclusions ouvertes $j_i : U \rightarrow X_i$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ X_1 & & X_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & S & \end{array}$$

soit commutatif, on a $j_1^*(\omega_{\pi_1}^n) = j_2^*(\omega_{\pi_2}^n)$ et donc, en particulier, pour tout ouvert U de X muni de l'injection naturelle $j : U \rightarrow X$ et de la restriction de π à U que l'on note π_U , on a $\omega_\pi^n|_U = \omega_{\pi_U}^n$. De plus, il est stable par tout changement de base plat entre espaces complexes.

(v) Il munit π d'un morphisme canonique $\int_\pi : \mathbb{R}^n \pi_! \omega_\pi^n \rightarrow \mathcal{O}_S$ de formation compatible aux restrictions ouvertes sur X (resp. S) et aux changements de bases plats sur S .

(vi) Si π est propre, $\omega_\pi^n = \mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$

(vii) Tout diagramme commutatif d'espaces analytiques complexes

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\Psi} & X_1 \\ & \searrow \pi_2 & \swarrow \pi_1 \\ & S & \end{array}$$

avec π_1 (resp. π_2) universellement équidimensionnels et propres de dimension relative n_1 (resp. n_2), Ψ propre de dimension relative bornée par l'entier $d := n_2 - n_1$, donne un morphisme canonique $\mathbb{R}^d \Psi_* \omega_{\pi_2}^{n_2} \rightarrow \omega_{\pi_1}^{n_1}$ induisant le diagramme commutatif de faisceaux analytiques

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n_2} \pi_{2*} \omega_{\pi_2}^{n_2} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^{n_1} \pi_{1*} \omega_{\pi_1}^{n_1} \\ & \searrow \int_{\pi_2} & \swarrow \int_{\pi_1} \\ & \mathcal{O}_S & \end{array}$$

(viii) Si S est un point, il coïncide avec le faisceau dualisant de Grothendieck, Andréotti- Kas ou Golovin :

$$\omega_\pi^n \simeq \mathcal{H}_n(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}^n(\mathcal{O}_X) = \omega_X^n$$

Corollaire 1.1. Soient $\pi \in \mathcal{E}(S, n)$ et k un entier naturel. Alors, il existe un unique faisceau \mathcal{O}_X -cohérent ω_π^k vérifiant les propriétés suivantes :

(i) il est de profondeur au moins 2 fibre par fibre sur S , coïncide avec le faisceau des k -formes holomorphes relatives sur la partie régulière de π et, pour toute installation locale de π (cf Thm 1), on a

$$\omega_\pi^k := \sigma^*(\mathcal{E}xt^p(\sigma_* \Omega_{X/S}^{n-k}, \Omega_{Z/S}^{n+p}))$$

(ii) on a des isomorphismes canoniques $\omega_\pi^k \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^{n-k}, \omega_\pi^n)$

(iii) Si S est un point, ces faisceaux coïncident avec les dualisés de Andréotti- Kas- Golovin des faisceaux Ω_X^{n-k} .

Théorème 2. Soit π un élément de $\mathcal{E}(S, n)$ muni d'une pondération \mathfrak{X} . Alors, on a les équivalences :

(1) π est analytiquement géométriquement plat

(2) il existe un unique morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu $\int_{\pi, \mathfrak{X}}^{(1)} : \mathbb{R}^n \pi_! \Omega_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{O}_S$ de formation compatible à l'additivité des pondérations sur π , stable par changement de base entre espaces complexes réduits, donnant, en particulier, l'intégration usuelle dans le cas où S est un point.

(3) il existe un unique morphisme canonique de faisceaux cohérents $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}} : \Omega_{X/S}^n \rightarrow \omega_\pi^n$, prolongeant le morphisme naturel $j_* j^* \Omega_{X/S}^n \rightarrow j_* j^* \omega_\pi^n$ et vérifiant les propriétés suivantes:

(i) il est de formation compatible à l'additivité des pondérations, aux changement de base réduit et satisfait la propriété de la trace relative,

(ii) il induit un morphisme de complexes différentiels gradués $^{(2)}$

$$\mathcal{C}_\pi^\bullet : \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \omega_\pi^\bullet$$

(iii) • si \mathfrak{X} est la pondération standard, $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}}$ donne la classe fondamentale relative

de [B4],

• si \mathfrak{X} est la pondération algébrique (i.e si π est plat ou plus généralement de Tor-dimension finie), $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}}$ est le morphisme classe fondamentale relative de [A.E]

étendu à ce cadre.

La flèche $\mathcal{C}_{\pi, \mathfrak{X}}$ sera appelée *morphisme classe fondamentale relative pondéré* de π .

Corollaire 2.1. Soit $\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$ (resp. $\pi_1 : X_1 \rightarrow S$) un morphisme analytiquement géométriquement plat de dimension relative n_2 (resp. n_1). Alors, le morphisme composé $\pi : X_2 \rightarrow S$ est analytiquement géométriquement plat si et seulement si le morphisme naturel $\mathbb{R}^{n_1+n_2} \pi_1!(\Omega_{X_2/X_1}^{n_2} \otimes \pi_2^* \Omega_{X_1/S}^{n_1}) \rightarrow \mathcal{O}_S$ se prolonge

⁽¹⁾ On entend par là, une continuité topologique au niveau des groupes des sections globales munis de leurs structures d'espaces vectoriels topologiques **F.S** ou **Q.F.S**

⁽²⁾ Ce n'est pas un morphisme d'algèbres car ω_π^\bullet n'en est pas une puisque l'on a pas de produit interne. Cette lacune est déjà présente dans le cas absolu comme on peut le voir sur $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$. En effet, la fonction méromorphe $\frac{y}{x}$ (resp. la forme $\frac{dx}{y}$) définit une section de ω_X^0 (resp. ω_X^1) mais leur produit $\frac{dx}{x}$ ne définit pas une section de ω_X^1 ! Cependant, ce produit est interne si X est normal.

en unique morphisme $\mathbb{R}^{n_1+n_2}\pi_!\Omega_{X_2/S}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathcal{O}_S$ ayant les propriétés du théorème 2 et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n_1+n_2}\pi_!(\Omega_{X_2/X_1}^{n_2} \otimes \pi_2^*\Omega_{X_1/S}^{n_1}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^{n_1+n_2}\pi_!\Omega_{X_2/S}^{n_1+n_2} \\ & \searrow & \swarrow \Phi \\ & \mathcal{O}_S & \end{array}$$

Théorème 3. Soit π un élément de $\mathcal{E}(S, n)$ muni d’une pondération \mathfrak{X} . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) π est analytiquement géométriquement plat
- (ii) le faisceau ω_π^n est caractérisé par la propriété de la trace (relative) et stable par changement de base entre espaces complexes réduits.

Comme nous l’avons mentionné dans l’introduction, la construction, de nature purement algébrique, du faisceau des formes méromorphes régulières relatives, entreprise par Kunz et Waldi ([K.W]), se transporte à la catégorie des germes d’espaces analytique complexes pour un morphisme plat grâce à l’important et conséquent travail de Kersken ([Ke]). En dehors du cas propre, pour lequel on utilise la dualité analytique relative de [R.R.V], la globalisation d’un tel travail ne semble pas du tout évidente. Il s’avère que, sans emprunter les méandres d’une dualité analytique relative générale inachevée, l’existence de l’analogue analytique relatif du faisceau de Kunz-Waldi existe non seulement dans le cas plat mais plus généralement dans le cas analytiquement géométriquement plat comme le montre le

Corollaire 3.1. Soient

- $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme n -analytiquement géométriquement plat d’espaces analytiques complexes réduits de dimension localement fini,
- X_0 (resp. S_0) l’ouvert dense de X (resp. S) sur lequel π est plat et $\tilde{\omega}_{X_0/S_0}^n$ le faisceau des formes méromorphes régulières de Kunz-Waldi-Kersken.

Alors, ω_π^n est l’unique prolongement cohérent du faisceau $\tilde{\omega}_{X_0/S_0}^n$. De plus, la famille de faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents $\omega_\pi^\bullet := \mathcal{H}om(\Omega_{X/S}^{n-\bullet}, \omega_\pi^n)$ est munie d’une différentielle non triviale D , faisant de $(\omega_{X/S}^\bullet, D)$ un complexe différentiel de $(\Omega_{X/S}^\bullet, d_{X/S})$ -modules.

Le résultat suivant, qui peut-être établi de façon presque indépendante de ce qui précède, montre que le caractère “analytiquement géométriquement plat” d’un morphisme contient suffisamment d’informations pour pouvoir accoucher d’une structure dualisante sans faire explicitement appel à une quelconque théorie de la dualité.

Théorème 4. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme analytiquement géométriquement plat. Alors, il existe un unique faisceau \mathcal{O}_X cohérent, $\Lambda_{X/S}^n$ vérifiant:

(i) il est de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S , caractérisé par la propriété de la trace relative et stable par changement de base entre espaces complexes réduits de dimension finie,

(ii) il munit π d'un morphisme d'intégration $\int_\pi : \mathbb{R}\pi_!\Lambda_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{O}_S$ compatible avec l'additivité des cycles et stable par changement de base entre espaces complexes réduits. De plus, tout diagramme commutatif d'espaces analytiques complexes De plus, tout diagramme commutatif d'espaces analytiques complexes

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\Psi} & X_1 \\ & \searrow \pi_2 & \swarrow \pi_1 \\ & S & \end{array}$$

avec π_1 (resp. π_2) analytiquement géométriquement plats de dimension relative n_1 (resp. n_2) et Ψ universellement équidimensionnel et propre de dimension relative bornée par l'entier $d := n_2 - n_1$, donne un morphisme canonique $\mathbb{R}^d \Psi_* \Lambda_{X_2/S}^{d+n_1} \rightarrow \Lambda_{X_1/S}^{n_1}$ induisant le diagramme commutatif de faisceaux analytiques

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n_2} \pi_{2!} \Lambda_{X_2/S}^{n_2} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^{n_1} \pi_{1!} \Lambda_{X_1/S}^{n_1} \\ & \searrow \int_{\pi_2} & \swarrow \int_{\pi_1} \\ & \mathcal{O}_S & \end{array}$$

I. Notion de morphisme continûment ou analytiquement géométriquement plat.

1.0. Terminologie usuelle relative à l'espace des cycles selon [B1].

Dans la construction d'une structure analytique sur l'ensemble des cycles compacts effectifs de dimension pure d'un espace complexe donné, l'espace quotient normal $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) := (\mathbb{C}^p)^k / \sigma_k$ (σ_k étant le groupe symétrique d'ordre k) joue un rôle capital et fondamentale. En effet, l'idée directrice de Barlet dans [B1] était de dire qu'une famille de n -cycles effectifs d'un espace complexe X est analytique si et seulement si pour tout plongement local "adapté", l'intersection locale de chaque membre de cette famille avec des plans transverses (et de codimension complémentaire) donne une famille analytique de 0-cycles. Or, l'espace des 0-cycles d'un espace complexe quelconque X , s'identifie naturellement à la somme disjointe $\coprod_{r \geq 0} \text{Sym}^r(X)$.

On peut remarquer que cette construction est propre à la géométrie analytique complexe (et en grande partie à la caractéristique nulle du corps de base !) puisqu'elle utilise des outils de l'analyse complexe tels que les formules intégrales de Cauchy, les relations non triviales entre *Trace* et *Déterminant* d'un endomorphisme et le fait que l'on puisse exprimer en termes de fonctions de Newton les fonctions symétriques des racines d'un polynôme donné. Ce dernier point extrêmement important permet, une fois repérés les points de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ par leurs fonctions symétriques, de produire un plongement naturel de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ dans un espace numérique convenable. De ce fait, la structure analytique globale recherchée est produite par recollement de structures analytiques locales parfaitement et précisément décrites.

1.0.1. Quelques définitions.

1.0.1.1. Si Z est un espace analytique complexe réduit et n un entier naturel, on appelle *n -cycle analytique effectif* de Z la donnée d'une combinaison linéaire formelle localement finie du type $W := \sum_{i \in I} n_i W_i^{(3)}$ où les W_i sont des sous ensembles analytiques complexes irréductibles de dimension pure n dans Z , et n_i des entiers strictement positifs appelés multiplicités; le sous ensemble analytique $|W| := \bigcup_{i \in I} W_i$ est appelé *support* de W .

Soit V un ouvert de Z muni d'un plongement $\sigma : V \rightarrow U \times B \subset \mathbb{C}^N$ avec U (resp. B) un polydisque ouvert de \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{C}^{N-n}). La carte $E := (\sigma, V, U \times B)$ est

⁽³⁾ Pour un sous ensemble analytique Y de composantes irréductibles $(Y_i)_{i \in I}$, le cycle associé à Y est noté $[Y] := \sum_{i \in I} [Y_i]$ où $[Y_i] := 1.Y_i$

dite *adaptée* au cycle W si σ se prolonge en un plongement $\sigma' : V' \rightarrow U' \times B'$ avec $V \Subset V' \subset Z$, $U \Subset U' \subset \mathbb{C}^n$, $B \Subset B' \subset \mathbb{C}^{N-n}$ et $\sigma(|W| \cap V) \cap (\overline{U} \times \partial B) = \emptyset$ ⁽⁴⁾

Dans ce cas, pour tout i dans I , la restriction de la projection canonique $p_1 : U \times B \rightarrow U$ à $W_i \cap V$ est un revêtement ramifié d'un certain degré k_i sur U et définit donc une application analytique $F_{E,i} : U \rightarrow \text{Sym}^{k_i}(\mathbb{C}^p)$, associant à t fixé dans U les fonctions symétriques des branches locales de ce revêtement ramifié. L'application naturelle $(\mathbb{C}^p)^r \times (\mathbb{C}^p)^l \rightarrow (\mathbb{C}^p)^{r+l}$ qui induit, par passage au quotient, une application canonique $\text{Sym}^r(\mathbb{C}^p) \times \text{Sym}^l(\mathbb{C}^p) \rightarrow \text{Sym}^{r+l}(\mathbb{C}^p)$ (qui est un homéomorphisme et même un isomorphisme local) permet de définir le *degré* du cycle W dans cette carte E comme étant l'entier $\deg_E(W) = k := \sum_i k_i n_i$ qui est le degré total du

revêtement ramifié donnée par l'application analytique $F_E : U \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ définie par $F_E(t) := \prod_i (F_{E,i}(t))^{n_i}$. En désignant par $S_h(\mathbb{C}^p)$ la composante homogène de degré h de l'algèbre symétrique de \mathbb{C}^p qui s'identifie naturellement à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré h sur $(\mathbb{C}^p)^*$, il est facile de voir que la somme directe des applications $s_h(X_1, \dots, X_k) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq k} X_{i_1} \cdots X_{i_h}$, définies de $(\mathbb{C}^p)^k$ à valeurs dans $S_h(\mathbb{C}^p)$, induit, par passage au quotient, un plongement naturel $\sigma : \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \rightarrow V := \bigoplus_{h=1}^k S_h(\mathbb{C}^p)$. Remarquons, au passage, que le polynôme unitaire ⁽⁵⁾

$$D(X_1, \dots, X_k)[T] := \prod_{i < j} (T^2 - (X_i - X_j)^2) = \sum_{h=0}^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^h D_h(x) T^{2h}$$

à coefficients dans l'algèbre symétrique de \mathbb{C}^p , définit, pour chaque entier h , une application σ_k - invariante de $(\mathbb{C}^p)^k$ dans $S_{k(k-1)-2h}(\mathbb{C}^p)$ et donc des applications

$$D_h : \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \rightarrow S_{k(k-1)-2h}(\mathbb{C}^p)$$

jouant un rôle notoire dans la stratification algébrique de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$.

1.0.1.2. Multiplicité d'un point dans un cycle.

⁽⁴⁾ Dans cette situation, pour tout t dans U , le cycle intersection $W \bullet (\{t\} \times B)$ est bien défini dans $U \times B$ et se projette en un 0-cycle de B .

⁽⁵⁾ Ce n'est rien d'autre que la version multi-linéaire du polynôme **discriminant** donné par $D(z) = \prod_{i < j} (w_i(z) - w_j(z))^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{j=n} \frac{\partial P}{\partial w}(z, w_j)$ pour $P(z, w) := \sum_{j=0}^{j=n} a_j(z) w^j$

Selon [B.M], la *multiplicité* de $x \in \mathbb{C}^p$ dans $(x_1, \dots, x_k) \in \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ est le nombre de fois qu'est répété x dans ce k -uplet. Si U est un ouvert de \mathbb{C}^n , $F : U \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ une application holomorphe associée à un certain revêtement ramifié $f : X \rightarrow U$ et $z = (t, x) \in U \times \mathbb{C}^p$, la *multiplicité* de z dans X est l'entier noté $\mu_z(X)$ donnant la multiplicité de x dans le k -uplet $F(t)$.

Si X est un cycle d'un espace complexe Z . Pour toute écaïlle adaptée E , on note X_E le revêtement ramifié associé à X dans E . Soit $z \in Z$. On appelle *multiplicité* de z dans le cycle X , l'entier $\mu_z(X)$ donnée par

$$\mu_z(X) := \min_E(\mu_z(X_E))$$

quand E décrit l'ensemble des écaïlles adaptées à X .

On peut remarquer que pour tout z dans Z , il existe toujours une écaïlle adaptée à X telle que $\mu_z(X) = \deg_E(X)$.

Soit $Y = \sum_{i \in I} n_i Y_i$ un cycle et z un point d'un espace complexe Z , la *multiplicité* de z dans le cycle Y est donnée par

$$\mu_z(Y) := \sum_{i \in I} n_i \mu_z(Y_i)$$

On peut signaler au lecteur que la définition “algébrique” donnée dans §3.1 de [Fu] coïncide avec la définition précédente. Par ailleurs, il trouvera exposé dans [Si] une définition due à [Tu] adaptée au cas d'un morphisme ouvert $\pi : X \rightarrow S$ d'espaces complexes avec X localement de dimension pure et S localement irréductible.

1.0.1.3. Fonctions et formes de Newton.

(a) Soit F un \mathbb{C} - espace vectoriel de dimension finie. Soient x (resp. y) un k -uplet de $(\mathbb{C}^p)^k$ (resp. de F^k). la l -ème fonction de Newton de x pondérée par y est l'élément de $S_l(\mathbb{C}^p) \otimes F$ défini par l'expression $N_l(x, y) := \sum_{j=1}^k y_j \otimes x_j^l$. Alors, pour tout entier $l \leq k$, on a les relations de Newton vectorielles

$$\sum_{h=0}^k (-1)^h N_{l-h}(x, y) \cdot S_h(x) = 0, \quad S_0 := 1$$

Le lecteur trouvera dans le chapitre 0 de [B1], l'adaptation vectorielle des résultats classiques tournant autour de cette notion et pourra consulter [Ang] sur les polynômes et formes multilinéaires de Waring permettant d'exprimer les fonctions symétriques en termes de fonctions de Newton dans ce cadre vectoriel.

(b) Comme nous le verrons, la notion de **Formes de Newton** (cf [B4]) jouent un rôle cruciale dans le cas des familles de cycles de dimension strictement positive.

Soit

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^p)^k & \xrightarrow{q} & \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \\ & \searrow p_j \quad \swarrow p & \\ & \mathbb{C}^p & \end{array}$$

le diagramme commutatif naturel dans lequel q est l'application quotient, p la projection naturelle et p_j la projection canonique de $(\mathbb{C}^p)^k$ sur son j -ème facteur.

Soit U un ouvert de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ et $p(U) = \{x \in \mathbb{C}^p : \exists x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}^p \text{ tel que } q(x, x_2, \dots, x_k) \in U\}$ son image dans \mathbb{C}^p .

Soit $\omega^r := (q_*\Omega^r)^{\sigma_k}$, la partie σ_k -invariante de l'image directe par q des formes holomorphes sur $(\mathbb{C}^p)^k$. Alors, une forme $\xi \in \Gamma(U, \omega^r)$ est dite *de Newton* s'il existe

une forme η définie sur l'ouvert $p(U)$ telle que $\xi = \sum_{j=1}^k p_j^* \eta$.

- Le faisceau des m -formes de Newton, noté \mathcal{N}_m , est cohérent et engendré par les formes de Newton globales $w_{I,J} = \sum_{j=1}^{j=k} p_j^*(x^I dx^J)$ où I et J sont des ensembles d'indices de longueurs respectives a et b . De plus, pour tout entier $m \geq 0$, on a les relations

$$\sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h S_h(x_1, \dots, x_k) w_{m+h,I}(x_1, \dots, x_k) = 0$$

Desquelles résultent l'identification $\omega^r = \sum_{i=1}^r \omega^{r-i} \wedge \mathcal{N}_i$, pour tout entier $r \geq 1$.

1.0.2. Famille analytique de cycles.

1.0.2.1. Ensemble des cycles analytiques effectifs d'un espace complexe.

Si X est un espace analytique complexe donné, on note $\mathcal{C}_*(X)$ (ou $\mathcal{C}_*^{loc}(X)$) l'ensemble des cycles analytiques (positifs) de dimension donnée s'écrivant localement comme combinaison linéaire localement finie à coefficients entiers de sous ensembles analytiques irréductibles de X . Utilisant les résultats de Federer-Fleming-King, A. Cassa a montré dans [C] que l'ensemble des cycles positifs de dimension pure n d'une variété analytique complexe est un espace topologique métrique complet dont la topologie est caractérisée par celle de la convergence en "masse" définie sur les courants. Il montre, en particulier, l'existence d'une unique application injective $\mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{D}'_{2n}(X)$ faisant correspondre à tout cycle de X le courant d'intégration qui lui est naturellement associé grâce au résultat fondamental de Lelong [L]. Une procédure standard de localisation (par plongement local) et recollement permet d'étendre [C] au cas où X est singulier et d'en déduire que $\mathcal{C}_*(X)$ est un espace

topologique de Hausdorff, à bases dénombrables de voisinages (i.e "first countable"); ce qui permet de tester la compacité ou fermeture de sous espaces de $\mathcal{C}_n(X)$ en utilisant des suites de cycles.

Par ailleurs la construction de Barlet ([B1]) montre que les ouverts $V_{k,E} := \{Y \in \mathcal{C}_n(X)/E \text{ adapté pour } Y \text{ et } \text{Deg}_E(Y) = k\}$ forment, à k et E variables, une base d'ouverts naturels pour $\mathcal{C}_*(X)$. Il se trouve (cf §2.4, [Fu]) que la topologie de Hausdorff induite par la topologie faible de $\mathcal{D}'_{2n}(X)$ coïncide avec la topologie de Barlet. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Fu],[Si],[Ma] en gardant à l'esprit que cette question est déjà traitée presque dans sa totalité dans [C]. Il va sans dire que la topologie de $\mathcal{C}_*(X)$ est naturellement induite par les projections $\mathcal{C}_*(X) \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$ associant à chaque cycle de dimension mixte sa partie de dimension pure n .

En général, l'espace topologique $\mathcal{C}_*(X)$ n'est jamais localement compact et ne peut, donc, être doté d'une structure analytique complexe. Cependant, dans le cas des cycles compacts, c'est un espace analytique complexe comme l'a montré Barlet dans son conséquent travail consigné dans [B1] et dont nous allons rappeler le théorème fondamental de représentabilité.

1.0.2.2. Le théorème de Barlet.

Dans toute la suite S désignera un espace complexe réduit, localement de dimension finie.

Si S' est une partie de S , une *écaille ou carte S' -adaptée* à une famille $(X_s)_{s \in S}$ d'un espace complexe Z correspond à la donnée d'une carte $E := (\sigma, V, U \times B)$ vérifiant la condition

$$\overline{\bigcup_{s \in S'} (\sigma(|X_s| \cap \bar{V}) \cap (\bar{U} \times \partial B))} = \emptyset$$

Cela signifie exactement qu'il existe un compact K de B tel que

$$\sigma(|X_s| \cap \bar{V}) \subset \bar{U} \times K \quad \forall s \in S'$$

Sachant que l'espace des 0-cycles d'un espace complexe Z donné s'identifie canoniquement à la somme disjointe $\coprod_{r \geq 0} \text{Sym}^r(Z)$, on aimerait dire naturellement qu'une

famille continue de cycles $(X_s)_{s \in S}$ est analytique en un point s_0 de S si il existe un certain voisinage ouvert S_0 de s_0 tel que pour toute écaille, $E = (V, U, B, \sigma)$, S_0 -adaptée, l'application qui à $\{s\}$ associe $p_{1*}([\{t\} \times B] \bullet (X_s \cap V))$ est holomorphe (p_1 étant la projection canonique sur le premier facteur de $U \times B$). Cela traduit le fait que l'intersection de chaque X_s par des p -plans transverses donne une famille analytique de points.

Soit S un espace analytique complexe réduit et $(X_s)_{s \in S}$ une famille de n -cycles de Z paramétrée par S . On dit que cette famille est *analytique* si pour tout $s_0 \in S$ et **toute** écaïlle E adaptée à X_{s_0} , il existe un voisinage ouvert S_0 de s_0 dans S tel que

- i) E est adaptée à X_s pour tout $s \in S_0$ (i.e E est S_0 -adaptée).
- ii) $\deg_E(X_s) = \deg_E(X_{s_0})$ (en désignant, par $\deg_E(X_s)$, le degré du revêtement ramifié sous jacent au cycle X_s dans l'écaïlle E).
- ii) L'application induite $F_E : S_0 \times U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$ est analytique.

Dans [B1] chapitre 5, D. Barlet montre le résultat suivant:

Théorème . Soient Z un espace analytique complexe, \mathcal{C} la catégorie des espaces complexes réduits de dimension finie et morphismes analytiques, \mathcal{F}_n le foncteur contravariant de \mathcal{C} dans \mathcal{E} qui à S associe $\mathcal{F}_n(S)$ l'ensemble des familles analytiques de n -cycles compacts de Z paramétrée par S . Alors, pour tout entier naturel n , \mathcal{F}_n est un foncteur représentable.

En d'autres termes, il existe un espace analytique complexe réduit, noté $\mathcal{B}_n(Z)$, et une famille analytique de n -cycles compacts $\{X_Y/Y \in \mathcal{B}_n(Z)\}$ de Z paramétrée par $\mathcal{B}_n(Z)$ vérifiant la propriété universelle suivante:

Pour toute famille analytique $(X_s)_{s \in S}$ de n cycles compacts de Z paramétrée par un espace complexe réduit S , il existe un unique morphisme $\eta : S \longrightarrow \mathcal{B}_n(Z)$, tel que

$$\eta(s) = X_s$$

1.0.2.2. Morphisme Douady- Barlet.

Rappelons que pour tout espace complexe Z , Douady ([D]) a muni l'ensemble des sous espaces compacts de Z d'une structure analytique complexe. Il montre qu'il existe un couple d'espaces complexes $(\mathcal{D}_\#(Z), \mathcal{D}(Z))$ et un couple de morphismes propres $(\sigma, \pi_{\mathcal{D}})$, σ étant un plongement et $\pi_{\mathcal{D}}$ plat, installés dans le diagramme commutatif $\mathcal{D}_\#(Z) \xrightarrow[\sigma]{\pi_{\mathcal{D}}} \mathcal{D}(Z) \times Z \xrightarrow[p]{\phantom{\pi_{\mathcal{D}}}} \mathcal{D}(Z)$ et satisfaisant la propriété universelle (**D**) :

pour tout diagramme commutatif d'espaces complexes $X \xrightarrow[i]{} \tilde{S} \times Z \xrightarrow[p]{\pi} S$ de même nature que le précédent, il existe un unique morphisme $\Theta_\pi : S \rightarrow \mathcal{D}(Z)$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta_\pi} & \mathcal{D}_\#(Z) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{D}} \\ S & \xrightarrow{\Theta_\pi} & \mathcal{D}(Z) \end{array}$$

dans lequel $X \simeq S \times_{\mathcal{D}(Z)} \mathcal{D}_\#(Z)$.

En introduisant la notion de *platitudo géométrique*⁽⁶⁾, que nous étudions en détail dans le §(1.3), on déduit du théorème de Barlet une propriété universelle analogue à (D) à savoir l'existence d'un couple d'espaces complexes réduits (et localement de dimension finie) $(\mathcal{B}_\#(Z), \mathcal{B}(Z))$ et d'un couple de morphismes propres $(\sigma, \pi_{\mathcal{B}})$ avec σ plongement et $\pi_{\mathcal{B}}$ géométriquement plat installés dans le diagramme commutatif

$$\mathcal{B}_\#(Z) \xrightleftharpoons[\sigma]{\pi_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}(Z) \times Z \xrightarrow[p]{\quad} \mathcal{B}(Z) \quad \text{et satisfaisant la propriété universelle (B) :}$$

pour tout diagramme commutatif d'espaces complexes $X \xrightleftharpoons[i]{\pi} S \times Z \xrightarrow[p]{\quad} S$ de même nature que le précédent et avec S réduit, il existe un unique morphisme $\Psi_\pi : S \rightarrow \mathcal{B}(Z)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_\pi} & \mathcal{B}_\#(Z) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{B}} \\ S & \xrightarrow{\Psi_\pi} & \mathcal{B}(Z) \end{array}$$

et dans lequel $X \simeq S \times_{\mathcal{B}(Z)} \mathcal{B}_\#(Z)$.

De plus, si $\mathcal{D}_n(Z)$ (resp. $\mathcal{B}_n(Z)$) désigne le sous espace de $\mathcal{D}(Z)$ (resp. de $\mathcal{B}(Z)$) constitué de sous espaces de dimension pure n (resp. des cycles analytiques de dimension pure n), il existe une unique application holomorphe appelée *morphisme Douady-Barlet* (cf [B1]) $\rho : (\mathcal{D}_n(Z))_{red} \rightarrow \mathcal{B}_n(Z)$ associant à Y sous espace compact de Z , la somme $\sum_i n_i Y_i$, où Y_i désignent les composantes irréductibles de Y_{red} .

⁽⁶⁾ un morphisme propre, ouvert et de corang constant $\pi : X \rightarrow S$, avec S réduit et $\dim(X) \geq \dim(S)$, est dit *géométriquement plat* s'il est possible de munir ses fibres ensemblistes (plus précisément leurs composantes irréductibles) de multiplicités convenables de sorte que la famille $(\pi^{-1}(s))_{s \in S}$ devienne (ou soit induite par) une famille analytique de cycles au sens de [B1]. Cette notion est à l'espace de Barlet ce que la notion de platitudo est à l'espace de Douady.

1.0.2.3. Remarques.

- La propriété universelle de l'espace de Douady dit qu'un morphisme propre d'espaces complexes $f : X \rightarrow S$ est plat si et seulement si le graphe de f , que l'on notera \mathcal{G}_f , s'installe dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_f & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{D}_{\#}(X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{D}} \\ S & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{D}(X) \end{array}$$

avec $\mathcal{G}_f \simeq S \times_{\mathcal{D}(X)} \mathcal{D}_{\#}(X)$

- Dans le cadre de l'espace des cycles, cela nous suggère d'appeler *géométriquement plats* les morphismes d'espaces complexes $f : X \rightarrow S$ à base réduite dont le graphe \mathcal{G}_f s'insère dans un diagramme commutatif analogue au précédent obtenu en remplaçant \mathcal{D} par \mathcal{B} et vérifiant $\mathcal{G}_f \simeq S \times_{\mathcal{B}(X)} \mathcal{B}_{\#}(X)$
- Par construction, on a $\mathcal{B}_n(Z) := \mathcal{B}_n(Z_{red})$ et que $\mathcal{B}_0(Z) := \coprod_{r \geq 0} \text{Sym}^r(Z_{red})$

1.0.3. Morphisme trace.

1.0.3.0. Faisceaux fondamentaux sur un espace complexe réduit et de dimension pure.

Sans entrer dans les détails, signalons que sur un espace analytique réduit de dimension pure quelconque X , il existe, en dehors du faisceau des formes holomorphes (pouvant être défini de plusieurs manières d'ailleurs !) deux faisceaux particulièrement intéressants à savoir ω_X^k et \mathcal{L}_X^k . Le premier étant le dualisé de Andréotti-Kaas-Golovin du faisceau Ω_X^{n-k} entièrement caractérisé par la propriété de la trace et coïncidant, en degré maximal, avec le faisceau dualisant de Grothendieck (cf §(3.1.1), p.56), l'autre étant constitué de formes méromorphes se prolongeant holomorphiquement sur toute désingularisée de X et coïncidant, en degré maximal, avec le faisceau des formes méromorphes de carrés intégrables introduit par Griffiths, Grauert- Riemenschneider ([Gri], [G-R])⁽⁷⁾. Il se trouve que, dans le cas des V -variétés⁽⁸⁾ et donc, en particulier, sur $\text{Sym}^k(B)$, ces deux faisceaux coïncident. Mais il est montré dans [K1] que le faisceau \mathcal{L}_X^k est doté de nombreuses propriétés fonctorielles parmi lesquelles la stabilité par image réciproque de morphismes analytiques (qui fait défaut à ω_X^k); les restrictions aux sous-espaces quelconques auront

⁽⁷⁾ Les dualisés de Andreotti-Kaas-Golovin sont définis pour X non nécessairement réduit. Les hypothèses de pure dimensionnalité et de réduction permettent, respectivement, une caractérisation par la trace et une interprétation au moyen des formes méromorphes sur X .

⁽⁸⁾ Ce résultat est encore vraie dans le cas des singularités rationnelles [E].

toujours un sens et conservent leur nature originelle. De plus, pour tout morphisme propre et génériquement fini d'espaces analytiques complexes $f : X \rightarrow Y$, l'image directe au sens des courants induit un morphisme trace $f_*\omega_X^k \rightarrow \omega_Y^k$ se restreignant lui-même en une trace $f_*\mathcal{L}_X^k \rightarrow \mathcal{L}_Y^k$.

1.0.3.1. Trace absolue.

1.0.3.1.0. Trace absolue associée à un sous ensemble analytique d'une variété de Stein.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, rappelons que, si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre et surjectif d'espaces analytiques complexes de dimension pure $n+r$ et r avec X dénombrable à l'infini et $\mathbf{D}_X^{\bullet,\bullet}$ (resp. $\mathbf{D}_Y^{\bullet,\bullet}$) désignent le faisceau des courants de type (\bullet, \bullet) sur X (resp. S), on d'une *image directe* au sens des courants

$$\mathbf{T}_f^{\bullet,\bullet} : f_*\mathbf{D}_X^{n+\bullet, n+\bullet} \rightarrow \mathbf{D}_Y^{\bullet,\bullet}$$

donnant, en particulier, pour chaque section ϕ de $\mathcal{A}_X^{n+\bullet, n+\bullet}$ (faisceau des formes indéfiniment différentiables de type $(n+\bullet, n+\bullet)$ sur X et définies par plongement local),

$$\langle \mathbf{T}_f^{\bullet,\bullet}(\phi), \psi \rangle := \int_X \phi \wedge f^*\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{A}_c^{r-\bullet, r-\bullet}(Y)$$

Forsmis la compatibilité aux inclusions ouvertes, cette correspondance ne jouit d'aucune propriété fonctorielle naturelle en les arguments X et Y .

Si X est un sous ensemble analytique de dimension pure n d'un certain domaine d'un espace numérique \mathbb{C}^N , le théorème de paramétrisation locale ou de préparation de Weierstrass permet de le réaliser localement comme un revêtement ramifié au dessus d'un certain polydisque ouvert de \mathbb{C}^n . Plus précisément, pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert V de x , un plongement $\sigma : V \rightarrow W \subset \mathbb{C}^{n+p}$ où $W := U \times B \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ (U et B étant des polydisques ouverts relativement compacts de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^p respectivement) tel que $\sigma(V) \cap (\bar{U} \times \partial B) = \emptyset$ de sorte que la projection canonique sur U induise un morphisme fini et surjectif $f : V \rightarrow U$ qui est un revêtement ramifié au sens usuel dont on notera k son degré et $(f_j)_{1 \leq j \leq k}$ ses branches locales (ou feuilletts). Par abus de notation, on notera encore X l'ouvert V et désignerons par $j : \text{Reg}(X) \rightarrow X$ l'inclusion naturelle de la partie lisse de X dans X . Dans cette situation, f induit une image directe au sens des courants qui s'exprime, en dehors de la ramification, sous la forme

$$\mathbf{T}_f^{\bullet,\bullet}(\phi) := \sum_{j=1}^{j=k} f_j^*(\phi)$$

En particulier, pour toute q -forme holomorphe ϕ sur X , $\mathbf{T}_f^{q,0}(\phi)$ (trace que nous noterons dorénavant \mathbf{T}_f^q définit un courant $\bar{\partial}$ -fermé de type $(q, 0)$. Mais U étant

lisse (et de Stein), le lemme de Dolbeault- Grothendieck assure, alors, que c'est une $(q, 0)$ -forme holomorphe sur U .

Définition: Propriété de la trace absolue.

Soit x un point de X et ξ un germe en x du faisceau $j_*j^*\Omega_X^\bullet$. On dit que ξ vérifie la *propriété de la trace absolue* si pour chaque germe de paramétrisation locale de X en x et chaque germe α du faisceau des formes holomorphes $\Omega_X^{n-\bullet}$ en x , la forme

$T_f^n(\xi \wedge \alpha) := \sum_{j=1}^{j=k} f_j^*(\xi \wedge \alpha)$, définie (et holomorphe) en dehors de la ramification, se prolonge analytiquement à U tout entier.

On dit qu'une section ξ du faisceau $j_*j^*\Omega_X^\bullet$, sur un ouvert V de X , vérifie la propriété de la trace absolue si son germe en chaque point de V la vérifie.

L'ensemble des sections de $j_*j^*\Omega_X^\bullet$ vérifiant cette propriété constitue un sous faisceau cohérent du faisceau des formes méromorphes sur X et souvent noté ω_X^\bullet (cf (3.5)).

1.0.3.1.1. Trace associée à un cycle et trace universelle.

Conservons les notations précédentes et considérons un n - cycle $X = \sum_i n_i X_i$ de $U \times B$ dont le support est un revêtement ramifié de degré total k sur U et de branches locales $(f_j)_{1 \leq j \leq k}$. Comme il a été dit dans (1.0.1.1), il lui est naturellement associé une application analytique classifiante $F_X : U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$ que l'on peut insérer dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U \times B & \xrightarrow{F_X \times Id_B} & \text{Sym}^k(B) \times B \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & & & \text{Sym}^k(B) \# B \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & U & \xrightarrow{F_X} & \text{Sym}^k(B)
 \end{array}$$

f (sur $X \rightarrow U$), $f_\#$ (sur $\text{Sym}^k(B) \# B \rightarrow \text{Sym}^k(B)$)

dans lequel, on a ensemblistement $(F_X \times Id_B)^{-1}(\text{Sym}^k(B) \# B) = X$ et $f_\#$ un morphisme fini et géométriquement plat sur $\text{Sym}^k(B)$ qui est normal.

(i) **Trace de fonctions holomorphes.** Si h est une fonction holomorphe sur $U \times B$ que l'on peut supposer σ_k -invariante (sinon on la symétrise !), on définit une fonction holomorphe \tilde{h} sur $U \times B^k$ en posant $\tilde{h}(t, x_1, \dots, x_k) := \sum_j h(t, x_j)$. Comme elle est σ_k -invariante, elle correspond à une unique application holomorphe \bar{h} sur $U \times \text{Sym}^k(B)$. On convient, alors, de la définition

$$\mathcal{T}_f^0(h) := \bar{h}(t, F_X(t)) = F_X^*(\mathfrak{T}_{f_\#}^0(\bar{h}))$$

donnée, en dehors de la ramification, par l'expression $\sum_i n_i \sum_j h(t, f_j(t))$.

(ii) Trace de formes holomorphes. Pour définir notre morphisme trace sur les formes holomorphes, on utilise la trace universelle $\mathfrak{T}_{f\#}^\bullet : f_{\#*} \omega_{\#}^\bullet \rightarrow \omega_{\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)}^\bullet$ et les formes de Newton. Comme un tel morphisme est nécessairement \mathcal{O}_U -linéaire, on s'intéresse essentiellement aux formes provenant de B . Soient $w_{i,j}$ une j -forme de Newton sur B et $\tilde{w}_{i,j} := \sum_r p_r^* w_{i,j}$ où p_r désigne simplement la projection canonique de B^k sur le r -ème facteur. Comme $\tilde{w}_{i,j}$ est σ_k -invariante, elle provient forme méromorphe $\bar{w}_{i,j}$ section du faisceau $\omega_{\text{Sym}^k(B) \times B}^\bullet$ (qui est d'ailleurs engendré par ces formes cf (1.0.3.1). On pose, alors

$$\mathcal{T}_f^j(w_{i,j}) := F_X^*(\mathfrak{T}_{f\#}^j(\bar{w}_{i,j}))$$

Alors, le procédé de symétrisation et la décomposition nucléaire des formes sur $U \times B$, permettent d'étendre cette relation aux formes holomorphes quelconques sur $U \times B$ et de définir un morphisme trace $\mathcal{T}_f^\bullet : f_* \Omega_X^\bullet \rightarrow \Omega_U^\bullet$ qui est \mathcal{O}_U -linéaire, commutant à la différentielle extérieure usuelle, de nature local sur U et B et compatible à l'additivité des cycles en faisant la somme point par point des cycles correspondants grâce à l'application “somme” donnée dans (1.0.1.1).

1.0.3.2. Trace relative.

Pour mieux positionner le problème, commençons par

1.0.3.2.0. Quelques remarques d'ordre général.

Il est bien connu que tout morphisme ouvert à fibres de dimension pure n , $\pi : X \rightarrow S$, entre espaces complexes, admet une factorisation locale, par rapport à l'une quelconque de ses fibres, du type (\clubsuit)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & Z := S \times U \times B \\ \downarrow \pi & \searrow f & \downarrow p \\ S & \xleftarrow{q} & S \times U \end{array}$$

où U et B sont des polydisques relativement compacts de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^p respectivement, f est ouvert, fini et surjectif, σ un plongement local, p et q les projections canoniques.

L'enjeu est de voir, dans quelle mesure, il est possible de produire (par analogie avec le cas absolu!) un morphisme $\mathcal{T}_f^\bullet : f_* \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{S \times U/S}^\bullet$ vérifiant naturellement les propriétés suivantes:

- (i) il est de nature locale sur U et S

- (ii) il est $\Omega_{S \times U/S}^\bullet$ -linéaire et commute aux différentielles S -relatives usuelles.
- (iii) il est additive en les pondérations sur π dans le sens suivant:

soient \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2 deux pondérations de π et (U, B, σ) une écaille S -adaptée, alors

$$\mathcal{T}_{f, \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2}^\bullet = \mathcal{T}_{f, \mathfrak{X}_1}^\bullet + \mathcal{T}_{f, \mathfrak{X}_2}^\bullet$$

On peut tenter d'utiliser l'image directe des courants mais alors on se retrouve devant de sérieuses difficultés. En effet, **(1.0.3.1)** donne, en particulier, un morphisme *trace* $\mathcal{T}_f^{\bullet, 0} : f_* i^*(\Omega_{Z/S}^\bullet) \rightarrow \mathcal{D}_{S \times U}^{\bullet, 0}$, à valeurs dans le faisceau des courants $\bar{\partial}$ -fermés de type $(\bullet, 0)$. Cette trace est bien évidemment $\Omega_{S \times U}^\bullet$ -linéaire, génériquement holomorphe sur $S \times U$ et holomorphe fibre par fibre en vertu du lemme de Dolbeault-Grothendieck. Mais des exemples simples montrent qu'en présence de singularités arbitraires sur S et sans aucune condition sur le mode de variance des fibres du morphisme, il n'y'a pratiquement aucune chance de voir ce courant définir une forme holomorphe globale S -relative sur $S \times U$. En fait, le passage de la situation absolue à la situation relative n'est pas du tout une simple formalité puisqu'il fait apparaître plusieurs obstacles de tailles à savoir :

(1) un morphisme fini et surjectif sur une base quelconque n'a aucune raison de définir un revêtement ramifié au sens usuel puisque le degré peut ne pas être localement constant.

(2) Combien même ce serait le cas, et disposant ainsi d'une application analytique classifiante $F : S \times U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$, la variation de la ramification étant incontrôlable, on ne peut empêcher qu'il y'ait certaines valeurs critiques du paramètre s pour lesquelles l'image de U par la restriction de F à $\{s\} \times U$ soit entièrement contenue dans le lieu singulier de $\text{Sym}^k(B)$. Or, par construction, la trace relative (si elle existe !) doit être un objet qui, pour chaque s fixé, coïncide avec la trace absolue précédemment décrite. Mais, alors, pour les valeurs critiques du paramètre quel sens donné à la trace absolue ?

(3) On ne dispose pas d'un analogue du lemme de Dolbeault- Grothendieck dans cette situation relative générale.

Pour surmonter **(1)**, on impose à la famille d'être au moins *continue* ce qui contraint le morphisme d'être au moins ouvert et de corang constant⁽⁹⁾. La condition supplémentaire que doit vérifier un tel morphisme est que la fonction $s \rightarrow$

⁽⁹⁾ Mais cela ne suffit pas car même si le morphisme est ouvert entre espaces complexes irréductibles et donc à fibres de dimension pure constante, les fibres ne définissent pas toujours une famille continue de cycles; pour s'en convaincre, il suffit, par exemple, de considérer la normalisation faible d'une courbe !

$\text{Deg}_E(\pi^{-1}(s))$ ⁽¹⁰⁾ soit localement constante; ce qui est toujours le cas si S est localement irréductible. On contourne **(2)** en utilisant une stratification convenable de $\text{Sym}^k(B)$, qui, brièvement dit, assurera l'existence d'une valeur entière minimale l telle que $\{s\} \times U$ ne soit pas entièrement incluse dans le lieu singulier de $\text{Sym}^1(B)$. Malheureusement (ou heureusement !) **(3)** est insurmontable. Sans conditions supplémentaires sur la variation de la famille, les courants $\bar{\partial}$ -fermés sur $S \times U$ obtenus par image directe ne produisent, généralement jamais, des formes holomorphes S -relatives!

Pour les détails sur la stratification de $\text{Sym}^k(B)$, on renvoie le lecteur à [B2], p18 dans lequel il est montré que les sous ensembles algébriques $M_\mu := \{x \in \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) / \text{mult}(x) \geq \mu\}$ ont pour lieu singulier $M_{\mu+1}$ et $M_\mu \setminus M_{\mu+1}$ est un sous ensemble analytique localement fermé sans singularités, dont les composantes connexes sont en bijection avec les suites d'entiers positifs (n_1, \dots, n_i) vérifiant $\sum_{j=1}^i n_j = k$ et $\sum_{j=1}^i n_j \frac{(n_j - 1)}{2} = \mu$.

Si S est un espace complexe réduit irréductible, F une application analytique de $S \times U$ dans $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ et l le plus grand entier pour lequel $F(S \times U) \subset M_l$. Alors, **la composante générique** de F est l'unique composante connexe de $M_l \setminus M_{l+1}$ contenant $F(S \times U \setminus F^{-1}(M_{l+1}))$.

Comme on va le voir les traces des formes holomorphes S -relatives sur X sont entièrement déterminées par les traces des formes de Newton induisant elles mêmes des sections d'un faisceau particulier sur $\text{Sym}^k(B)$.

1.0.3.2.1. Trace associée à une famille analytique locale de cycles et trace universelle.

Notons $\# := \text{Sym}^k(B) \# B$ le sous espace d'incidence (ou diagonale généralisée) qui est muni naturellement d'une projection finie et surjective $\tilde{f} : \# \rightarrow \text{Sym}^k(B)$. Comme $\text{Sym}^k(B)$ est un espace complexe normal donc localement irréductible, ce morphisme est un revêtement ramifié au sens usuel. Toujours en raison de la normalité, \tilde{f} est analytiquement géométriquement plat. Comme dans le cas absolu, on dispose d'un morphisme trace fondamental ou universel

$$\mathfrak{T}_\#^\bullet : \tilde{f}_* \omega_\#^\bullet \rightarrow \omega_{\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)}^\bullet$$

qui est un morphisme d'algèbres différentielles graduées.

⁽¹⁰⁾ Plus précisément, étant donné s_0 dans S et une projection locale quelconque induite par la donnée d'une écaille adaptée à $\pi^{-1}(s_0)$, il existe un voisinage ouvert S_0 de s_0 tel que E soit adaptée à $\pi^{-1}(s)$ pour tout $s \in S_0$ et l'application $s \rightarrow \text{Deg}_E(\pi^{-1}(s))$ est localement constante.

La situation générale locale se traite via le cas universel si une certaine application analytique $F : S \times U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$ est donnée. Dans ce cas, on se connecte à la situation universelle par le biais du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & S \times U \times B & \xrightarrow{F \times Id_B} & \text{Sym}^k(B) \times B & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 X & \xrightarrow{\quad} & \text{Sym}^k(B) \# B & & \\
 & \searrow f & & \nearrow & \\
 & S \times U & \xrightarrow{F} & \text{Sym}^k(B) &
 \end{array}$$

dans lequel, on a ensemblistement $(F \times Id_B)^{-1}(\text{Sym}^k(B) \# B) = X$. Notons Γ la composante générique de F et $S_\Gamma \times U$ son image réciproque dans le changement de base $\Gamma \rightarrow \text{Sym}^k(B)$. Elle est évidemment d'intérieur vide et connexe puisque S est supposé irréductible. Alors, les changements de bases $S_\Gamma \times U \rightarrow S \times U$ et $\Gamma \rightarrow \text{Sym}^k(B)$, donnent un diagramme commutatif dont les carrés extrêmes sont cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & \xrightarrow{\tilde{F}} & \# & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 X_\Gamma & \xrightarrow{\quad} & S \times U & \xrightarrow{F} & \text{Sym}^k(B) & \xleftarrow{\quad} & \#_\Gamma \\
 \downarrow f_\Gamma & \nearrow & \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \tilde{f}_\Gamma \\
 S_\Gamma \times U & \xrightarrow{\quad} & & & & & \Gamma \\
 & \xrightarrow{F_\Gamma} & & & & &
 \end{array}$$

On suppose implicitement donné un plongement de X dans $S \times U \times B$. Soit σ une forme de Newton sur B dont on note $\tilde{\sigma}$ son image réciproque sur B^k (comme dans (1.0.3.1.1)). Cette dernière provient d'une certaine forme méromorphe $\bar{\sigma}$ section du faisceau $\mathcal{L}_{\text{Sym}^k(B) \times B}^\bullet$. On définit, alors, la trace relative à f ,

$$\mathcal{T}_f^{\bullet,0}(\sigma) := \mathcal{T}_{f_\Gamma}^{\bullet,0}(\sigma|_{X_\Gamma}) = F_\Gamma^*(\mathfrak{T}_{\tilde{f}_\Gamma}^{\bullet,0}(\tilde{\sigma}|_{\#_\Gamma}))$$

qui a un sens puisque $\sigma|_{X_\Gamma}$ est une forme de Newton provenant de la restriction $\tilde{\sigma}$ à $\#_\Gamma$ définissant une section du faisceau $\mathcal{L}_{\#_\Gamma}^\bullet$.

Pour des raisons déjà invoquées, l'action de ce morphisme sur les formes de Newton suffit à déterminer son action sur les formes holomorphes relatives générales pour donner un morphisme trace relative $\mathcal{T}_f^\bullet : f_* \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{S \times U/S}^\bullet$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) précisées dans (1.0.3.2.0).

1.0.3.3. Degré géométrique et algébrique d'un morphisme fini (cf[Va]).

Soient X et S deux espaces analytiques complexes avec S connexe et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme fini ouvert et surjectif. Alors,

- si π est continûment (resp. analytiquement) géométriquement plat sur S réduit, il existe un entier k , appelé *le degré géométrique* de π , et une application continue (resp. analytique) $\Psi^\pi : S \rightarrow \text{Sym}^k(X_{\text{red}})$ donnée par $\Psi^\pi(s) = \sum_{x \in \pi^{-1}(s)} \{x\}$ et ten-

ant compte des multiplicités. De plus, ces conditions génère un morphisme *trace continue* (resp. *holomorphe*) $\mathcal{T}_\pi^{(c)} : \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S$ (resp. $\mathcal{T}_\pi^h : \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S$).

- si π est plat sur S arbitraire, le *degré algébrique* de π est défini comme étant le plus grand entier r tel que le faisceau cohérent $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ soit un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang r .

On constate que le degré algébrique r est stable par changement de base et qu'il coïncide avec le degré géométrique k si S est réduit.

La situation algébriquement plate produit aussi une *trace holomorphe* naturelle $\mathcal{T}_\pi^{(h)} : \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S$ qui, grâce au changement de base $S_{\text{red}} \rightarrow S$ et le diagramme commutatif qui s'en déduit

$$\begin{array}{ccc} X' := S_{\text{red}} \times_S X & \longrightarrow & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' := S_{\text{red}} & \longrightarrow & S \end{array}$$

est compatible avec les traces précédentes en un sens évident. On pose, d'ailleurs, $\mathcal{T}_\pi^{(c)} := \mathcal{T}_{\pi'}^{(c)}$ précédentes en un sens évident. On pose, d'ailleurs, $\mathcal{T}_\pi^{(c)} := \mathcal{T}_{\pi'}^{(c)}$

1.1. Quelques exemples.

(i) ([Ang]). $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ est le quotient de $(\mathbb{C}^2)^2$ par $\sigma_2 = \{Id, -Id\}$ le groupe symétrique d'ordre 2. Soient (u, v) et (u', v') deux couples de $(\mathbb{C}^2)^2$. Alors les applications $N_1 = u + u'$, $N_2 = v + v'$, $N_{11} = u^2 + u'^2$, $N_{12} = uv + u'v'$ et $N_{22} = v^2 + v'^2$ fournissent un plongement de $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ dans \mathbb{C}^5 .

Soit $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / xy - z^2 = 0\}$ le cône de \mathbb{C}^3 et $\pi : X := \mathbb{C}^2 \rightarrow S$ la paramétrisation donnée par $(u, v) \rightarrow (u^2, v^2, uv)$ qui est un morphisme ouvert, fini, surjectif (revêtement ramifié de degré 2), Cohen-Macaulay mais non plat. On a un morphisme trace

$$\mathcal{T}_\pi^0 : \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S$$

donné par

$$\mathcal{T}_\pi^0(f)(s) := f(x_1(s)) + f(x_2(s)), \quad \forall f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

où les points $x_i(s)$ constituent la fibre $\pi^{-1}(s)$.

Comme les fonctions holomorphes sur S s'expriment en fonctions de u, v, u^2, v^2 et uv , on voit clairement comment interviennent naturellement les fonctions de Newton. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{T}_\pi^0(u) = \mathcal{T}_\pi^0(v) = 0, \quad \mathcal{T}_\pi^0(u^2) = 2x, \quad \mathcal{T}_\pi^0(v^2) = 2y, \quad \mathcal{T}_\pi^0(uv) = 2z$$

Et le morphisme $S \rightarrow \text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ définissant la famille correspond exactement au morphisme d'anneaux donné par

$$N_1 \rightarrow \mathcal{T}_\pi^0(u), \quad N_2 \rightarrow \mathcal{T}_\pi^0(v), \quad N_{11} \rightarrow \mathcal{T}_\pi^0(u^2), \quad N_{12} \rightarrow \mathcal{T}_\pi^0(uv), \quad N_{22} \rightarrow \mathcal{T}_\pi^0(v^2)$$

(ii) (cf [K1]). Soit $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a^2 = cb^2\}$, la surface faiblement normale (donc non localement irréductible), communément appelée “le parapluie de Whitney”, dont le lieu singulier est la droite $\Sigma = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a = b = 0\}$. Soit D un disque centré en l'origine et relativement compact dans \mathbb{C} .

Notons $\text{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, la partie homogène de degré 2 de $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ canoniquement identifiée à $\mathbb{C}^2/\{id, -id\}$ qui est isomorphe au cône de \mathbb{C}^3 donné dans l'exemple (i).

Soit $\mathcal{I} := (u^2 - ct^2, v^2 - b^2, uv - at, a^2 - cb^2)$ l'idéal de \mathbb{C}^6 définissant un certain sous espace que l'on notera abusivement $X = \{(u, v, a, b, c, t) \in \mathbb{C}^2 \times S \times D : u^2 = ct^2, v^2 = b^2, uv = at\}$. On désignera par $\pi : X \rightarrow S$ (resp. $f : X \rightarrow S \times D$) les morphismes induits par les projections canoniques de $S \times D \times \mathbb{C}^2 \rightarrow S \times D \rightarrow S$ et par $F : S \times D \rightarrow \text{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, l'application analytique donnée par $(a, b, c, t) \rightarrow (ct^2, b^2, at)$.

Il apparait clairement que X , qui est le produit fibré de $S \times D$ par \mathbb{C}^2 au dessus de $\text{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, s'identifie, après quotient par l'involution $(a, b, c, t, u, v) \rightarrow (a, b, c, t, -u, -v)$, au graphe de l'application F .

Pour s générique, la fibre $X_s := \pi^{-1}(s)$ est constituée d'un couple de droites en position générale dont les équations sont

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{a}{b}t \\ v_1 &= b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_2 &= -u_1 \\ v_2 &= -v_1 \end{cases}$$

Remarquons au passage que π n'est pas plat puisque de multiplicité 3 en l'origine alors qu'elle vaut 2 en les points génériques.

Comme les fonctions de Newton fondamentales u^2, v^2 et uv ont pour traces S -relatives respectives $\mathcal{T}_f^0(u^2) = 2ct^2$, $\mathcal{T}_f^0(v^2) = 2b^2$ et $\mathcal{T}_f^0(uv) = 2at$, qui sont manifestement holomorphes sur S , on a une famille analytique de revêtements ramifiés

de degré 2 et de codimension 2 de D dans $D \times \mathbb{C}^2$, “repéré” par le morphisme $F : S \times D \rightarrow \text{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)$, envoyant chaque couple (s, t) sur les fonctions symétriques des branches locales $f_1 = (u_1, v_1)$ et $f_2 = -f_1$. Il s’en suit que π définit une famille continue de 1-cycles de \mathbb{C}^3 (on dira plus brièvement que π est continûment géométriquement plat).

L’analyticité de la famille se teste en regardant la trace S -relative des formes de Newton. Dans notre cas, le faisceau des 1- formes de Newton est engendré par les formes udu, vdv, udv et vdu dont les traces S -relatives sont $\mathcal{T}_f^1(udu) = 2ctdt$, $\mathcal{T}_f^1(vdv) = 0$ et $\mathcal{T}_f^1(udv - vdu) = -2adt$ qui sont clairement S - holomorphes. Ainsi π définit une famille analytique locale de 1-cycles de \mathbb{C}^3 (on dira que π est analytiquement géométriquement plat).

Remarquons que l’identification $\text{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2) \simeq \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / xy = z^2\}$, permet de voir que la forme $udv - vdu$ correspond exactement (par image directe) à la forme méromorphe (non holomorphe) $z(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y})$ sur le cône; elle définit naturellement une section du faisceau $\mathcal{L}_{\text{Sym}_0^2(\mathbb{C}^2)}^1$.

(iii). Exemple d’une famille continue mais non analytique ([B1]).

La construction de l’ exemple se fait de la façon suivante:

Considérons $(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)$ un système de coordonnées sur \mathbb{C}^{10} et posons

$$\begin{aligned} X(t) &= x_1 t^2 + x_2 t + x_3 \\ Y(t) &= y_1 t^2 + y_2 t + y_3 \\ Z(t) &= z_1 t^2 + z_2 t + z_3 \end{aligned}$$

On impose la condition $X(t)Y(t) = Z^2(t)$ de sorte à pouvoir écrire

$$\begin{aligned} u^2 &= (at + b)^2 = X(t) \\ v^2 &= (ct + d)^2 = Y(t) \\ uv &= (at + b)(ct + d) = Z(t) \end{aligned}$$

On trouve alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_2^2 &= 4x_1x_3, \quad z_1^2 = x_1y_1, \quad y_2^2 = 4y_1y_3, \quad z_3^2 = x_3y_3, \quad 4z_1z_3 = x_2y_2, \quad x_1y_2 + x_2y_1 = \\ &= 2z_1z_2 \quad 2z_2z_3 = x_2y_3 + x_3y_2, \quad x_2z_2 = 2(x_1z_3 + x_3z_1), \quad y_2z_2 = 2(y_1z_3 + y_3z_1), \quad x_1y_3 + \\ &+ x_2y_2 + x_3y_1 = 2z_1z_3 + z_2^2 \text{ et} \\ x_1 &= a^2, \quad x_2 = 2ab, \quad x_3 = b^2, \quad y_1 = c^2, \quad y_2 = 2cd, \quad y_3 = d^2, \quad z_1 = ac, \quad z_2 = ad + \\ &+ bc, \quad z_3 = bd, \end{aligned}$$

que nous symboliserons par (\spadesuit) et (\clubsuit) respectivement.

Ces relations définissent une application holomorphe $\phi : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^9$ dont l'image s'identifie au cône de dimension 4 de \mathbb{C}^9 . Notons S le sous espace réduit (et irréductible puisque c'est l'image de \mathbb{C}^4) associée à l'idéal défini par les relations (\spadesuit). Alors, il est facile de voir que la fonction méromorphe et localement bornée $\frac{z_1 x_2}{x_1}$ se prolonge continûment mais non holomorphiquement à S tout entier.

Soit D le disque unité relativement compact de \mathbb{C} , Γ le graphe de la famille de droites précédemment décrite et $\pi : \Gamma \rightarrow S \times D$ le morphisme fini induit par la projection canonique. Si la famille était analytique, π définirait une famille analytique de points paramétrée par S et par conséquent la trace S -relative de toute forme holomorphe serait S -holomorphe. Mais il n'en est rien puisque l'on a

$$Tr_\pi(udv) = 2(ct + d)d(at + b) = 2cat.dt + 2da.dt$$

Or, en vertu de (\spadesuit) et (\clubsuit), on a sur S ,

$$ac = z_1, \quad ad = z_2 - \frac{z_1 x_2}{2x_1}$$

Et comme la fonction méromorphe $\frac{z_1 x_2}{x_1}$ ne se prolonge pas holomorphiquement à S , cette famille continue ne peut être analytique.

En choisissant convenablement les paramètres, il est tout à fait possible de transformer S en espace réduit, non réduit, Cohen Macaulay, non Cohen Macaulay et même intersection complète.

Soit $\xi \in \mathbb{C}$. Alors, en posant

$$a = \xi^2 + \xi^3, \quad b = \xi^5, \quad c = \xi^6 - \xi^7, \quad d = \xi^9 + \xi^{11}$$

on obtient le système

$$\begin{array}{lll} x_1 = \xi^4(1 + \xi)^2 & y_1 = \xi^{12}(1 - \xi)^2 & z_1 = \xi^8(1 - \xi^2) \\ x_2 = 2\xi^7(1 + \xi) & y_2 = 2\xi^{15}(1 - \xi)(1 + \xi^2) & z_2 = \xi^{11}(2 + \xi^2 + \xi^3) \\ x_3 = \xi^{10} & y_3 = \xi^{18}(1 + \xi^2)^2 & z_3 = \xi^{14}(1 + \xi^2) \end{array}$$

décrivant une courbe monomiale \mathcal{C} inscrite sur le cône précédent et sur laquelle la fonction méromorphe $\sigma := \frac{z_1 x_2}{x_1} = \frac{z_3 y_2}{y_3}$ vérifie une équation de dépendance intégrale puisque $\sigma^2 = \frac{x_3 y_1}{2}$ mais ne se prolonge pas analytiquement sur \mathcal{C} . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer son image réciproque par cette paramétrisation (qui est la normalisation) et de constater que, pour des raisons de degrés et de valuations, la fonction $\tilde{\sigma} = 2\xi^{11}(1 - \xi)$ ne peut être holomorphe sur cette courbe.

1.2. Sur quelques notions fondamentales.

Les notions principales dont il s’agit seront celles de dimension d’un espace analytique complexe, équidimensionnalité et ouverture d’un morphisme d’espaces complexes. Nos principales sources auxquelles nous renvoyons le lecteur pour de plus amples détails, sont [A.S], [G.R1], [Gr2], [Ka], [Fi] ou [Lo], pour l’aspect analytique complexe et, évidemment, à [E.G.A. 4] (et principalement au paragraphe 14.4) pour l’aspect algébrique. Il pourra d’ailleurs constater la validité d’un bon nombre de résultats algébriques dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

1.2.0. Il nous arrivera d’utiliser, sans mentionner, les caractérisations suivantes de l’irréductibilité locale, la faible normalité ou normalité d’un espace complexe réduit. Si X est un tel espace, de faisceau structural \mathcal{O}_X , on désigne par \mathcal{O}_X^c (resp. \mathcal{O}_X^0) le faisceau des germes de fonctions génériquement holomorphes et continues sur X (resp. celui des germes de fonctions génériquement holomorphes et localement bornées). Alors, on a (cf [Mo] par exemple)

- (i) X localement irréductible en x si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x}^c = \mathcal{O}_{X,x}^0$
- (ii) X faiblement normal en x si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}^c$
- (iii) X normal en x si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}^0$

1.2.1. Morphisme équidimensionnel- morphisme ouvert d’espaces analytiques complexes.

1.2.1.0. Formule des dimensions dans le cadre des algèbres analytiques locales.

Rappelons que la catégorie des germes d’espaces analytiques complexes est duale de la catégorie des algèbres analytiques (i.e des anneaux quotients non nuls d’anneau de séries convergentes); la dualité étant concrétisée par la correspondance $(X, x) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Il est bien connu que ceux sont des anneaux locaux noethériens à corps résiduel \mathbb{C} et que tout morphisme d’algèbres analytiques est local. On dispose du lemme de normalisation de Noether et du théorème de préparation de Weierstrass disant, respectivement, que

- pour toute algèbre analytique \mathcal{A} de dimension n , il existe un morphisme fini et injectif $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \mathcal{A}$
 - un morphisme d’algèbres analytiques est fini si et seulement si il est quasi-fini.
- La dualité étant concrétisée par la correspondance

$$(X, x) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

Nous renvoyons le lecteur aux excellents exposés de Cartan, Grothendieck et Houzel du séminaire Henri Cartan sur les techniques de constructions en géométrie analytique ([C]).

Dans les constructions qui nous occupent, on s'aperçoit que les fondations de cette architecture repose fondamentalement sur *la notion de morphisme trace* et de la possibilité d'associer à un morphisme d'algèbres analytiques un tel objet. Une condition nécessaire est que le dit morphisme satisfasse au moins *la formule des dimensions* c'est-à-dire étant donné un morphisme d'algèbres analytiques $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, \mathfrak{m} le radical de \mathcal{A} , alors

$$\text{Dim}\mathcal{B} = \text{Dim}\mathcal{A} + \text{Dim}\mathcal{B}/\mathfrak{m}\mathcal{B}$$

Dans ce cas, il existe une suite d'éléments b_1, \dots, b_n de \mathcal{B} dont les classes résiduelles forment un système de paramètres sur $\mathcal{B}/\mathfrak{m}\mathcal{B}$ (de dimension de Krull n !) et donnant un morphisme de \mathcal{A} -algèbres $\phi : \mathcal{A}\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{B}$ envoyant naturellement x_j sur b_j faisant de \mathcal{B} une \mathcal{A} -algèbre finie sur $\mathcal{A}\{x_1, \dots, x_n\}$. L'énoncé géométrique se formule de la manière suivante ([Ki] p3, Hilfssatz 2.3):

Soient $f : X \rightarrow S$ est un morphisme d'espaces analytiques complexes, x un point de X d'image $s := f(x)$. Supposons que f satisfasse *la formule des dimensions*

$$\text{Dim}(X, x) = \text{Dim}(S, s) + \text{Dim}(f^{-1}(s), x)$$

Alors, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un voisinage ouvert V de s contenant $f(U)$, un voisinage ouvert W de l'origine de \mathbb{C}^n (n étant la dimension de la fibre $f^{-1}(s)$) et un morphisme fini $g : U \rightarrow W \times V$ tel que f se factorise sous la forme $X \xrightarrow[g]{g} W \times U \xrightarrow{q} S$, q étant la projection canonique. Rappelons

que toutes les algèbres analytiques locales peuvent être munies d'une topologie canonique (cf [Ju]).

1.2.1.1. Equidimensionnalité et ouverture d'un morphisme.

Les définitions suivantes sont unanimement adoptées dans la littérature (cf [E.G.A].IV, [Fi] ou [A.S]). Un morphisme d'espaces complexes $\pi : X \rightarrow S$ est dit *équidimensionnel* si

- (i) la fonction semi-continue supérieurement $x \rightarrow \dim_x(\pi^{-1}(\pi(x)))$ est localement constante et
- (ii) chaque composante irréductible de X domine une composante irréductible de S .

Signalons au passage que le théorème de Chevalley sur la semi-continuité de la dimension des fibres est encore valable dans le cadre de la géométrie analytique.

Il est important de signaler que le défaut majeur de cette notion est le manque de stabilité par changement de base; ce qui réduit sensiblement ses applications

dans le cadre relatif. On dispose, toutefois, d'une notion plus adaptée au cadre relatif qui est celle de morphisme *ouvert* dont la propriété caractéristique est de transformer tout ouvert de X en ouvert de S . Cette notion qui correspond à celle de *universellement ouvert* de la géométrie algébrique, est, quant à elle, stable par changement de base. Signalons, à titre indicatif, que Grothendieck donne un exemple simple de morphisme ouvert non universellement ouvert dans [E.G.A] IV.3, Remarque 14.3.9.i.

1.2.1.2. Quelques remarques d'ordre général.

1.2.1.2.1. Sur l'équidimensionnalité.

(i) C'est une condition ouverte sur la source du morphisme. L'ensemble des points en lesquels un morphisme est équidimensionnel est toujours un ouvert non vide.

(ii) Elle n'est pas stable par changement de base comme le montre l'exemple suivant donné par

$X_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = z = 0\}$, $X_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : y = 0; z = 1\}$,
 $S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\}$ et $S_2 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\}$. En posant $X := X_1 \cup X_2$ (resp. $S := S_1 \cup S_2$) et $\pi : X \rightarrow S$ le morphisme fini et surjectif induit par la projection canonique $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$, on voit que X et S sont de dimension pure 1 et π équidimensionnel. Mais le changement de base $S_2 \rightarrow S$ donne le sous espace $\pi^{-1}(S_2) \simeq \{0\} \cup \mathbb{C}$ qui n'est manifestement pas de dimension pure et de plus la restriction de π à $S_2 \times_S X$ n'est pas équidimensionnelle sur S_2 .

(iii) Un morphisme dont les fibres sont de dimension pure constante (même sur une base localement irréductible!), n'est pas nécessairement équidimensionnel. Il suffit pour cela de considérer l'exemple classique de la réunion d'un plan et d'une droite donné par

$X := X_1 \cup X_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : y = 0; x = z\}$ s'envoyant sur $S := \mathbb{C}^2$ grâce au morphisme fini et surjectif induit par la projection canonique $p(x, y, z) = (x, y)$.

Si la base d'un morphisme équidimensionnel est de dimension pure alors la source aussi.

1.2.1.2.2. Sur l'ouverture.

(iv) ce n'est pas une condition ouverte (tout comme l'irréductibilité locale). Dans l'exemple (b.iii) le morphisme de X sur S est bien ouvert en 0 mais sur aucun voisinage ouvert de ce point! Elle est de nature locale sur la base et non sur la source. là encore, nous voyons que, même sur une base localement irréductible, un morphisme à fibres de dimension pure constante n'est pas automatiquement ouvert. Il en sera ainsi si la source est de dimension pure. L'ensemble des points en lesquels

un morphisme d'espaces complexes est ouvert n'est, en général, ni ouvert ni fermé mais son complémentaire est néanmoins constructible (cf [Par])

(v) Elle est stable par changement de base (et correspond à la notion de "universellement ouvert" de la géométrie algébrique).

(vi) La restriction d'un morphisme ouvert sur les composantes irréductibles de la source n'est pas nécessairement ouverte comme le montre l'exemple suivant ([Par]) : Soient $X := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 : x = y = 0\} \cup \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 : z = t = 0\} = X_1 \cup X_2$ et $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ donné par

$$\begin{aligned}\pi|_{X_1}(x, y, z, t) &= ((z + t)z, (z + t)t) \\ \pi|_{X_2}(x, y, z, t) &= ((x - y)x, (x - y)y)\end{aligned}$$

Alors, il est facile de voir que $\pi|_{X_1}(z, t)$ et $\pi|_{X_2}(x, y)$ ne sont pas ouvertes à l'origine alors que π l'est.

(vii) L'image réciproque par un morphisme ouvert d'un ouvert dense est toujours dense. L'image par un morphisme ouvert de toute composante irréductible est un ouvert de la base; en fait cette image est toujours contenue dans au moins une composante irréductible de la base.

(viii) Soit $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme d'espaces complexes. Alors,

• (Remmert [Re]) Si X et S sont de dimension pure avec S localement irréductible alors on a les équivalences

(a) π ouvert

(b) $\dim_x \pi^{-1}\pi(x) = \dim_x X - \dim_{\pi(x)} S = m - r, \quad \forall x \in X$

(c) $\dim \pi^{-1}(s) = m - r, \quad \forall s \in \pi(X)$

• X, S de dimension pure et π ouvert impliquent que les fibres sont de dimension constante pure. Les morphismes de normalisation faible ou forte montrent que la réciproque est évidemment fausse.

• si les fibres et S sont de dimension pures et π ouvert surjectif alors X est de dimension pure. L'exemple (b.ii) montre aussi que la réciproque est fausse puisque S_2 et les fibres de π sont de dimension pure mais π n'est pas ouvert car sinon $\pi^{-1}(S_2)$ serait de dimension pure aussi! On peut aussi avancer le fait que le sous ensemble ouvert X_1 s'envoie sur S_1 qui n'est pas ouvert !

• si π est ouvert et à fibres de dimension pure constante alors S de dimension pure est équivalent à X de dimension pure.

• si π est équidimensionnel et S localement irréductible alors π est ouvert.

1.2.1.3. Morphisme universellement équidimensionnel.

Définition: Soient n un entier naturel et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces complexes (avec S éventuellement réduit). Nous dirons que π est *n-universellement équidimensionnel* s'il est ouvert et à fibres de dimension pure constante.

Comme les propriétés d’être ouvert et à fibres de dimension constante sont stables par changement de base arbitraire, il en va de même de la notion de *universellement équidimensionnel*.

1.2.1.4. Remarques.

A ce stade, attirons l’attention du lecteur sur la définition non standard de l’équidimensionnalité proposée dans [B.M]. En effet, cette définition n’exige pas le point (ii) de la définition d’usage (cf (1.2.1.1)) et tolère implicitement les fibres vides. Mais alors, il ne sera pas du tout vrai que la pureté de la dimension de S entraîne celle de X comme nous le montre le premier exemple de (1.2.1.2.1) ou tout autre exemple avec $S = \mathbb{C}^m$ et X un espace complexe quelconque de dimension non pure. La définition usuelle imposerait à X d’être de dimension pure si S l’est ! (si X et S sont de dimension pure et π à fibres de dimension pure constante, π n’est pas nécessairement ouvert comme le montre le morphisme de normalisation; on peut aussi avoir la pureté des dimensions de X et S et un morphisme à fibres de dimension pure mais non constante comme dans le cas des éclatements).

Par ailleurs, elle nous force à introduire les cycles relatifs de dimension mixte (si toutefois ils sont bien définis!); ce que l’on se garde d’envisager ici.

Conséquence de cela, il nous paraît préférable d’appeler *pseudo-équidimensionnel* ce qui est appelé *équidimensionnel* dans [B.M].

1.2.2. Cycle relatif.

1.2.2.1. Cycles associés aux fibres d’un morphisme.

Si X est localement de dimension pure et $\pi : X \rightarrow S$ est *génériquement ouvert*, les procédures décrites dans [Tu] ou [B.M], permettent de munir (génériquement sur S supposé réduit) de multiplicités les fibres de π et donc de définir une application naturelle

$$\Psi_{gen}^\pi : S_{gen} \rightarrow \mathcal{C}_*(X) \setminus \{0\} \text{ donnée par } s \rightarrow [\pi^{-1}(s)] := \sum_i \mu_{i,s} [X_{i,s}] \text{ où } X_{i,s} \text{ désignent}$$

les composantes irréductibles et les entiers $\mu_{i,s}$ les multiplicités associées. Le *lemme 3.1* de [Si] nous dit, d’ailleurs, que c’est une injection continue.

1.2.2.2. Définition: Si X et S sont deux espaces analytiques complexes réduits, on appellera *cycle S -relatif* toute combinaison linéaire localement finie $\mathcal{X} := \sum_j n_j X_j$

où les n_j sont des entiers relatifs et les X_j des sous espaces analytiques irréductibles réduits de $S \times X$ tel que le morphisme $F : |\mathcal{X}| := \bigcup_j X_j \rightarrow S$, induit par la projection

$S \times X \rightarrow S$, soit universellement équidimensionnelle. Il est dit *effectif* si $n_j \geq 0$ pour tout indice j et de *dimension pure m* si les X_j sont tous de dimension pure m .

1.3. Platitude géométrique.

1.3.1. Comme nous l’avons déjà dit $\mathcal{C}_*(X)$ est un espace topologique de Hausdorff à topologie dénombrable. Mais n’étant jamais localement compact, en général, il ne peut être muni d’une structure analytique complexe. Cette lacune ne nous permet pas de parler d’application analytique globale à valeurs dans $\mathcal{C}_*(X)$ et nous force à travailler avec des familles analytiques locales de cycles (cf [B1]).

Une famille de cycles $(X_s)_{s \in S}$ d’un espace complexe X paramétrée par un espace complexe réduit S est dite *continue* s’il lui est associé une application continue $\Psi : S \rightarrow \mathcal{C}_*(X)$ définie comme dans **(1.2.2.1.)**. La famille est dite *analytique locale* si elle est continue et donc associée à une application continue Ψ qui est de plus ”localement analytique” dans le sens suivant:

pour tout s_0 de S , il existe un voisinage ouvert S_0 de s_0 vérifiant que, pour toute écaille $E := (V, \sigma, U, B)$ S_0 -adaptée (muni de la projection canonique $p_1 : U \times B \rightarrow B$), l’application “classifiante $F : S_0 \times U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$, associant à (s, t) le 0-cycle $p_{1*}([\{t\} \times B] \cap \sigma_*(\Psi(s)))$, est analytique.

Cette donnée correspond bien à une fonction analytique locale sur S à valeurs dans un espace banachique. De façon précise, si $\mathfrak{E} := ((U_\alpha, B_\alpha, \sigma_\alpha))_{\alpha \in A}$ est une famille d’écaille adaptée au cycle X_{s_0} , on obtient un voisinage ouvert $S_{\mathfrak{E}}$ de s_0 et une application analytique

$$S_{\mathfrak{E}} \rightarrow \prod_{\alpha} \text{H}(\overline{U}_\alpha, \text{Sym}^{k_\alpha}(B_\alpha))$$

Dans le cas des cycles non compacts, le comportement parfois anarchique des cycles ne permet pas de se suffire d’une étude locale pour en déduire l’aspect global. Nous renvoyons à ce propos à [Ma] pour se rendre compte des difficultés inhérentes à cette situation.

1.3.2. La notion de platitude géométrique continue et analytique.

Rappelons que cette notion répond à la question de savoir si les fibres d’un morphisme d’espaces complexes $\pi : X \rightarrow S$ peuvent être munies de multiplicités convenables de sorte à ce qu’elles soient induites par une famille analytique locale ou seulement continue de cycles. Le point **(ii)** de la remarque **(1.3.3)** qui va suivre montre que, par égard au cas propre se raccrochant à la situation universelle, les morphismes candidats se doivent d’être nécessairement universellement ouverts. Cette condition n’est pas du tout suffisante comme le montre des exemples simples de normalisation faible (cf **(1.3.6)**). En règle général, un morphisme avec éclatement (même ”cachés”) est aux antipodes de ce que l’on attend.

En s’inspirant de [B.M], nous allons commencer par donner la :

1.3.2.1. Définition Soient n un entier naturel et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits universellement n -équidimensionnel. Soit \mathfrak{X} un cycle S -relatif effectif de $S \times X$.

Nous dirons que \mathfrak{X} est une **pondération** pour π si

$$(\star) \quad |\mathfrak{X}| \cap (\{s\} \times X) = \{s\} \times \pi^{-1}(s), \quad \forall s \in S$$

Elle sera dite

- *continûment géométriquement plate* si \mathfrak{X} induit une application continue $\Psi_\pi : S \rightarrow \mathcal{C}_n(X) \setminus \{0\}$
- *analytiquement géométriquement plate* si \mathfrak{X} correspond au graphe d'une famille analytique locale de n -cycles de X ou que l'application précédente Ψ_π est localement analytique dans le sens de (1.3.1).

On dira souvent, par abus de langage, que π est continûment (resp. analytiquement) géométriquement plat s'il est muni d'une pondération ayant cette propriété.

1.3.2.2. Définition Soient $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme universellement n -équidimensionnel d'espaces complexes réduits et Σ un sous espace de S tel que le morphisme déduit de π dans le changement de base $S_{gen} := S \setminus \Sigma \rightarrow S^{(11)}$ soit muni d'une pondération \mathfrak{X}_{gen} continûment (resp. analytiquement) géométriquement plate. Alors π est dit *fortement continûment (resp. analytiquement) géométriquement plat* s'il existe une pondération \mathfrak{X} continûment (resp. analytiquement) géométriquement plate de π telle que $\mathfrak{X}|_{S_{gen} \times X} = \mathfrak{X}_{gen}$.

Cela revient à dire que l'application $\Psi_{gen}^\pi : S_{gen} \rightarrow \mathcal{C}_*(X)$ donnée par $s \rightarrow [\pi^{-1}(s)] := \sum_i \mu_{i,s} [X_{i,s}]$ se prolonge en une application continue (resp. analytique locale) $\Psi^\pi : S \rightarrow \mathcal{C}_*(X) \setminus \{0\}$.

1.3.3. Remarques.

- (i) La notion de pondération effective est de nature locale sur X et S .
- (ii) Si la base est faiblement normal, fortement continûment géométriquement plat correspond à géométriquement plat de Siebert[Si] et continûment géométriquement plat à faiblement géométriquement plat; fortement analytiquement géométriquement plat correspond à géométriquement plat de Barlet [B2].
- (iii) Un morphisme $\pi : X \rightarrow S$ universellement équidimensionnel d'espaces analytiques complexes réduits admet toujours une pondération naturelle donnée par le graphe de π . En effet, si G_π est ce graphe (qui est un sous espace analytique complexe de $S \times X$) et $\bigcup_j G_\pi^j$ sa décomposition en composantes irréductibles, le cycle

⁽¹¹⁾ Même si $S \setminus \Sigma$ n'est pas nécessairement ouvert, en général, Ψ_{gen}^π est néanmoins bien défini puisque les multiplicités se déterminent localement sur X .

associé $[G_\pi] = \sum_j [G_\pi^j]$ est une pondération au sens de la définition précédente. Si S est normal, cette pondération naturelle est en fait analytiquement géométriquement plate. En général, elle n'est même pas continûment géométriquement plate. D'ailleurs des exemples simples montrent que la condition (\star) ne garantit pas du tout l'existence d'une application continue Ψ_π .

(iv) Dans le cas d'un d'un morphisme propre, la platitude géométrique s'exprime naturellement en terme d'espace de Barlet $\mathcal{B}(X)$. En effet, au vu de ce qui a été dit précédemment dans (1.0.2.2), cela revient exactement à montrer qu'il existe une application analytique $\Psi^\pi : S \rightarrow \mathcal{B}(X)$ sur S tout entier avec $|\Psi^\pi(s)| = \pi^{-1}(s)$ pour tout $s \in S$.

Notons $\mathcal{B}(X) \# X$ le sous espace d'incidence, $\pi_\# : \mathcal{B}(X) \# X \rightarrow \mathcal{B}(X)$ le morphisme universel et $\mathcal{B}_\#$ le cycle relatif universel associé à la famille universelle. Alors, $\pi_\#$ est, par définition, analytiquement géométriquement plat et par suite ouvert et à fibres de dimension pure constante. Par référence à cette situation universelle, π sera analytiquement géométriquement plat si et seulement si il s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_\pi} & \mathcal{B}_\#(X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{B}} \\ S & \xrightarrow{\Psi_\pi} & \mathcal{B}(X) \end{array}$$

et auquel cas, il sera alors pondéré par le cycle relatif $\mathcal{X}_\pi := \Theta^*(\mathcal{B}_\#)$.

Les propriétés de constance des fibres et d'ouverture d'un morphisme étant stables par changement de base, tout morphisme π rendant commutatif le diagramme précédent est nécessairement ouvert et à fibres de dimension pure constante c'est-à-dire universellement n -équidimensionnel.

Cela nous montre qu'une condition nécessaire pour qu'un morphisme d'espaces complexes soit analytiquement géométriquement plat est qu'il soit universellement équidimensionnel et surjectif; ce qui élimine la plupart des morphismes avec éclatements ! Encore une fois, des exemples simples montreront au lecteur que cette condition n'est pas suffisante et dans certain cas ne garantit même pas la continuité (en tant que cycles) de la famille définie par les fibres.

1.3.4. Notations.

Nous désignerons par :

- $\mathcal{E}(S, n)$ l'ensemble de tous les morphismes d'espaces analytiques complexes $\pi : X \rightarrow S$ universellement n -équidimensionnels,

- $\mathcal{E}_{pond}(S, n)$ l'ensemble des morphismes universellement n -équidimensionnels munis d'une certaine pondération \mathfrak{X} ,
- $\mathcal{G}_c(S, n)$ (resp. $\mathcal{G}_a(S, n)$) le sous ensemble de $\mathcal{E}_{pond}(S, n)$ constitué d'éléments dont la pondération est continûment géométriquement plate (resp analytiquement géométriquement plate). Dans la suite, nous donnerons des exemples simples montrant que les inclusions

$$\mathcal{G}_a(S, n) \subset \mathcal{G}_c(S, n) \subset \mathcal{E}_{pond}(S, n) \subset \mathcal{E}(S, n)$$

sont généralement strictes.

1.3.5. Les familles continues (resp. analytiques locales) de cycles génériquement réduits.

A l'origine, cette notion de platitude géométrique était réservée aux familles génériquement réduites (cf [B2]) et étaient définies, pour un morphisme propre d'espaces complexes irréductibles $\pi : X \rightarrow S$, de fibre générique de dimension pure n , muni d'un fermé analytique d'intérieur vide dans S que l'on note $\Sigma^{(12)}$ et d'une application holomorphe $\Psi_{gen}^\pi : S_{gen} := S \setminus \Sigma \rightarrow \mathcal{B}_n(X)$ donnée par $s \rightarrow [\pi^{-1}(s)] := \sum_i [X_{i,s}]$, $X_{i,s}$

étant les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(s)$ (en nombre fini puisque π est propre), en disant que π est *géométriquement plat* (c'est-à-dire *fortement analytiquement géométriquement plat* dans notre terminologie) si et seulement si Ψ_{gen}^π se prolonge analytiquement sur S tout entier.

On peut sensiblement généraliser cette définition (cf [Va]) au cas d'un morphisme $\pi : X \rightarrow S$ propre et n -équidimensionnel d'espaces complexes réduits. Ainsi, $\pi : X \rightarrow S$ était dit *géométriquement plat* (ou *fortement analytiquement géométriquement plat* selon notre définition) si il existe une famille analytique $(X_s)_{s \in S}$ de n -cycles de X paramétrée par S telle que

- (i) $X_s = [\pi^{-1}(s)]$, si s est régulier⁽¹³⁾
- (ii) $|X_s| = \pi^{-1}(s)$ pour tout $s \in S$.

En dehors des cas particuliers où S est localement irréductible, faiblement normal ou normal, on ne peut absolument rien dire sur l'existence d'un tel prolongement même par continuité!

Cette approche présente deux inconvénients majeurs à savoir ses défauts de fonctorialité flagrants et le fait qu'elle ne s'intéresse qu'aux familles génériquement réduites

⁽¹²⁾ On peut prendre Σ comme étant la réunion des points non normaux de S et des sous ensembles $\{s \in S : \dim(\pi^{-1}(s)) > n\} \cup \{s \in S : \pi^{-1}(s) \text{ est multiple}\}$

⁽¹³⁾ Cela signifie que s est lisse dans S et qu' aucune composante irréductible de $\pi^{-1}(s)$ n'est contenue dans le lieu singulier de X ou dans le lieu constitué des points de X en lesquels π n'est pas de rang maximum.

puisqu'en évitant des fermés d'intérieur vide aussi "gros" on élimine des situations géométriques simples telle que famille de coniques dégénérant en une droite double ! ⁽¹⁴⁾

En supposant S **faiblement normale** ⁽¹⁵⁾ et l'image de π dense dans S (donc pas nécessairement propre ou surjectif et en autorisant les composantes multiples!), Siebert ([Si]) proposait les définitions suivantes:

soient $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme *génériquement ouvert*, E le lieu de dégénérescence de π (cf [Fi], [Si]), N le lieu non normal de S et $S_{gen} := \pi(S \setminus \pi^{-1}(N \cup \pi(X)))$. Alors π est *géométriquement plat* ⁽¹⁶⁾ (c'est-à-dire *fortement analytiquement géométriquement plat* dans notre terminologie) si l'application associée $\Psi_{gen}^\pi : S_{gen} \rightarrow \mathcal{C}_*(X) \setminus \{0\}$ se prolonge continûment sur S et il est dit *faiblement géométriquement plat* (c'est-à-dire *continûment géométriquement plat* dans notre terminologie) si il existe une certaine application continue $\Psi_\pi : S \rightarrow \mathcal{C}_*(X) \setminus \{0\}$.

Dans [Si] (*proposition 5.3*, p.258), on retrouve le fait que la platitude géométrique forte est associée aux familles analytiques de cycles génériquement réduits.

La platitude géométrique dont il sera question dans cet article correspond à la platitude géométrique faible de Siebert sur une base réduite quelconque à laquelle on rajoute une condition d'analyticité locale. Comme nous allons le voir cette notion bénéficie, quant à elle, de bonnes propriétés fonctorielles en les arguments.

1.3.6. Quelques remarques générales sur la platitude géométrique .

On a déjà signalé au lecteur que, pour espérer greffer une structure de cycles sur les fibres d'un morphisme d'un espace complexe, l'ouverture est une condition absolument nécessaire mais loin d'être suffisante. En conséquence, les morphismes avec éclatements sont à éviter en général. Les exemples simples suivants (donnés en général par les normalisations fortes ou faibles) vont permettre d'illustrer les principales obstructions rencontrées. Rappelons que le morphisme de normalisation faible est fini, surjectif et ouvert.

(i) Morphisme équidimensionnel surjectif non géométriquement plat.

⁽¹⁴⁾ Il est facile de se convaincre qu'une condition nécessaire assurant l'analyticité d'une famille génériquement réduite $(X_s)_{s \in S}$ est que, pour tout s , les composantes irréductibles $X_{i,s}$ de $\pi^{-1}(s)$ ne soient pas entièrement incluse dans $\Sigma_3 := \{(s, x) \in S \times X : X \text{ non } S\text{-lisse en } (s, x)\}$.

⁽¹⁵⁾ Cette condition assure l'existence d'un prolongement analytique de toute fonction continue et génériquement holomorphe sur S et permet, ainsi, de se suffire d'une étude locale et un traitement "presque topologique " de la question.

⁽¹⁶⁾ Si π est propre, on retrouve la notion de platitude forte puisque sur un espace faiblement normal toute fonction continue et génériquement holomorphe est holomorphe.

- Considérons l'exemple de la page 76 de [G.P.R], de la surface faiblement normale de \mathbb{C}^3 communément appelée “parapluie de Cartan” et donnée par $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x^3 - z(x^2 - y^2) = 0\}$. Elle est irréductible, non localement irréductible (car sinon elle serait normale!) et admet pour lieu singulier la réunion des droites $\Sigma_1 = \{x = y = 0\}$ et $\Sigma_2 = \{x = z = 0\}$ dans \mathbb{C}^3 . Soit $X = \mathbb{C}^2$ et $\pi : X \rightarrow S$ le morphisme fini et surjectif qui à (u, v) associe $(v(u^2 - v^2), v(u^2 - v^2), v^3)$. Alors, il est facile de constater que $\pi^{-1}(s)$ est constitué d'un point pour $s = 0$, de six points pour $s \in \Sigma_1 \setminus \{0\}$ et de trois points si $s \in \Sigma_2 \setminus \{0\}$ et que, par conséquent, le degré du revêtement ramifié généralisé n'est pas localement constant. Cette pathologie se rencontre fréquemment quand le morphisme n'est pas ouvert.
- Soit $X := \mathbb{C}$ et $S := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 - x^2 + y^2 = 0\}$ et

$$\begin{aligned}\pi : X &\rightarrow S \\ t &\rightarrow (1 - t^2, t^2 - t^3)\end{aligned}$$

qui est un morphisme équidimensionnel mais non ouvert (ce n'est pas la normalisation faible) induisant une application génériquement holomorphe

$$\begin{aligned}\Psi_{gen}^\pi : S - \{0, 0\} &\rightarrow \mathcal{B}_0(X) \\ (x, y) &\rightarrow \left\{ \frac{y}{x} \right\}\end{aligned}$$

La fonction méromorphe $\frac{y}{x}$ est localement bornée puisqu'elle vérifie une équation de dépendance intégrale mais ne se prolonge pas continûment sur S qui est irréductible, faiblement normal mais non localement irréductible car sinon il serait normal! Dans ce cas, π n'est même pas continûment géométriquement plat.

- Dans la même veine, considérons

$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = z^2 - 1; y = z^3 - z\}$
 $S := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^2(x + 1)\}$ et $\pi : X \rightarrow S$ induit par la projection canonique $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ envoyant (x, y, z) sur (x, y) . Alors X et S sont de dimension pure 1, S est irréductible (puisque c'est l'image de \mathbb{C} par l'application $t \rightarrow (t^2 - 1, t^3 - t)$), π est équidimensionnel mais non ouvert puisqu'un voisinage ouvert lisse de $(0, 0, 1)$ dans X ne peut être appliqué sur un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans S dont le germe en ce point est la réunion de deux germes lisses. Là encore, il est facile de voir que la fonction méromorphe et localement bornée $\frac{y}{x}$ ne se prolonge pas de façon continue sur S qui est de toute évidence non localement irréductible. Il en résulte que l'application génériquement holomorphe

$$\begin{aligned}\Psi_{gen}^\pi : S - \{0, 0\} &\rightarrow \mathcal{B}_0(X) \\ (x, y) &\rightarrow \left\{ x, y, \frac{y}{x} \right\}\end{aligned}$$

ne se prolonge pas par continuité sur S .

(ii) Morphisme équidimensionnel surjectif ouvert et non géométriquement plat.

En général, les morphismes de normalisation faible répondent à ces critères. Pour l'illustrer, considérons l'exemple simple donné par:

$X := \mathbb{C}$, $S := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 - y^2 = 0\}$ et $\pi : X \rightarrow S$ le morphisme de normalisation faible (ou forte!) donné par $t \rightarrow (t^2, t^3)$.

π est universellement 0-ouvert et induit une application (génériquement holomorphe) $\Psi_{gen}^\pi : S - \{0, 0\} \rightarrow \mathcal{B}_0(X)$ donnée par $(x, y) \rightarrow \{\frac{y}{x}\}$

Comme S est localement irréductible et que la fonction méromorphe $\frac{y}{x}$ vérifie une équation de dépendance intégrale, elle se prolonge continûment sur S . Ainsi π est fortement continûment géométriquement plat puisque l'application Ψ_{gen}^π se prolonge continûment sur S . Mais ce dernier étant non faiblement normal, ce prolongement n'est pas holomorphe et donc π n'est donc pas fortement analytiquement géométriquement plat.

(iii) La platitude géométrique forte n'est pas stable par changement de base.

C'est le défaut majeur de cette notion que l'on peut comprendre aisément puisque, par changement de base, on ne peut empêcher, en général, l'apparition de branches multiples. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple de Douady d'une réunion de deux plans de \mathbb{C}^4 dont la projection canonique sur \mathbb{C}^2 est ouverte mais non plate. A un changement linéaire de coordonnées près, on retrouve cet exemple dans [V] exprimé sous la forme:

Soient $X := \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 z_2 = z_1 z_4 = z_2 z_3 = z_3 z_4 = 0\}$, $S := \mathbb{C}^2$, $S' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : x_1 x_2 = 0\}$. Considérons les morphismes $\pi : X \rightarrow S$ et $\nu : S' \rightarrow S$ donnés, respectivement, par $\pi(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 + z_2, z_3 + z_4)$ et $\nu(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Alors dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \longrightarrow & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{\nu} & S \end{array}$$

π est fortement géométriquement plat puisqu'il est équidimensionnel sur une base normale mais π_1 ne l'est pas puisque ce produit fibré est constitué d'une droite triple et de deux droites simples au dessus de chacune des deux branches de S' .

Remarquons qu'en pondérant la droite triple par un coefficient 2 et chacune des droites simples d'un coefficient 3, π_1 devient analytiquement géométriquement plat.

1.3.7. Exemples standards de morphismes analytiquement géométriquement plats.

Les cas fréquemment rencontrés sont ceux donnés par :

- *La pondération standard*: Soient Z et S deux espaces analytiques complexes avec S réduit, $(X_s)_{s \in S}$ une famille analytique de n -cycles de Z paramétrée par S dont le support du graphe $X = \{(s, z) \in S \times Z : z \in |X_s|\}$ (muni de sa structure réduite) est muni de la projection $\pi : X \rightarrow S$ induite par la projection canonique de $S \times Z$ sur S . la projection canonique. Alors le graphe de la famille $(\{s\} \times X_s)_{s \in S}$, qui est un cycle \mathfrak{X} de $S \times Z$, est une pondération analytiquement géométriquement plate de π .
- *La pondération algébrique*: Tout morphisme plat d'espaces complexes et n -équidimensionnel, $\pi : X \rightarrow S$, est naturellement pondéré géométriquement. En effet, si π est propre, le morphisme *Douady -Barlet* (cf **(1.0.2.2)** ou [B1], chap. V, thm 8) permet de donner un sens à cela en prenant pour pondération géométriquement plate le cycle donné par le graphe de la famille analytique $([\pi^{-1}(s)])_{s \in S}$ (où $[\pi^{-1}(s)]$ est le cycle associé au sous espace $\pi^{-1}(s)$). Dans le cas général, la procédure est la même puisque assigner des multiplicités est une opération locale sur X . A la lumière du théorème 2, ce qui vient d'être dit est valable pour les morphismes d'espaces complexes de *Tor-dimension* finie avec base réduite.
- *La pondération normale*: tout morphisme $\pi : X \rightarrow S$ équidimensionnel sur une base normale S est analytiquement géométriquement plat; en fait fortement analytiquement géométriquement plat.
- Les deux premiers exemples du paragraphes **(1.1)** donnent des morphismes analytiquement géométriquement plats sur une base normale et faiblement normale respectivement alors que le dernier est seulement continûment géométriquement plat sur une base non faiblement normale.

Pour terminer, citons les exemples suivants tirés de [B.M] et [Si] présentant deux situations différentes dans lesquelles il est possible ou pas “d'ajuster” convenablement les multiplicités du cycle relatif donné naturellement par le graphe du morphisme, de sorte à rendre cette pondération analytiquement ou seulement continûment géométriquement plate.

- Soient $S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / xy = 0\}$, $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / z^2 = x, y = 0\}$, $X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / z^3 = y, x = 0\}$ et $X = X_1 \cup X_2$.

Soit $\pi : X \rightarrow S$ induit par la projection canonique $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$. Alors, π est un morphisme fini surjectif et ouvert dont le graphe admet les deux composantes irréductibles $\tilde{X}_1 = \{(x, y, a, b, c) \in \mathbb{C}^3 / c^2 = a = x, y = b = 0\}$ et

$$\tilde{X}_2 = \{(x, y, a, b, c) \in \mathbb{C}^3 / c^3 = b = y, x = a = 0\}.$$

Alors, le cycle relatif $Y_1 := [\tilde{X}_1] + [\tilde{X}_2]$ est une pondération naturelle du morphisme π . Mais vu les multiplicités, il ne peut faire de π un morphisme continûment géométriquement plat. Par contre, le cycle relatif $Y_2 := 3[\tilde{X}_1] + 2[\tilde{X}_2]$ est une pondération continûment géométriquement plate et donc analytiquement géométriquement plate puisque la base est faiblement normale.

• Soient $S_1 := \{(x, y, t) \in \mathbb{C}^3 : t = 0\}$, $S_2 := \{(x, y, t) \in \mathbb{C}^3 : y = 0\}$,
 $X_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 : x^2 + y^2 - z^2 = t = 0\}$ et $X_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 : x - z = y = 0\}$.
 Posons $X := X_1 \cup X_2$, $S := S_1 \cup S_2$ et $\pi : X \rightarrow S$ le morphisme ouvert, fini et surjectif induit par la projection linéaire $p : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ envoyant (x, y, z, t) sur (x, y, t) .
 Alors, pour $i = 1, 2$, on a $\pi(X_i) = S_i$ et les multiplicités des restrictions de π à X_1 et X_2 sur $X_1 \cap X_2$ au dessus de $(0, 0)$ coïncident et valent 1 (en dehors de ce point, elles valent 2 et 1 respectivement). La platitude géométrique imposerait l'égalité des poids associés aux différentes composantes irréductibles ce qui ne peut avoir lieu ici puisqu'il est impossible de choisir un couple d'entiers non nuls (a, b) pondérant chacune des composantes irréductibles de sorte à récupérer, par continuité, la valeur 1 !

1.3.8. Propriétés fonctorielles de la notion de platitude géométrique analytique ou continue.

1.3.8.1. Fonctorialité basique.

Tout comme la platitude, cette notion est de nature locale sur la source; ce qui ramène bon nombre de problèmes sur les morphismes géométriquement plats à des problèmes d'algèbres analytiques locales.

Dans la suite, nous écrirons “géométriquement plat” quand l'énoncé proposé est valable aussi bien pour *continûment géométriquement plat* que pour *analytiquement géométriquement plat*.

(1) Compatibilité avec les changements de bases sur S :

Soient $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme n -géométriquement plat et $\eta : T \rightarrow S$ un morphisme d'espaces complexes réduits de dimension localement pure. Le morphisme $\hat{\pi} : T \times_S X \rightarrow T$ déduit du changement de base η est naturellement n -universellement équidimensionnel (rappelons à ce sujet, que de façon générale, un morphisme est ouvert si et seulement si sa restriction au réduit est ouverte). La platitude géométrique se lit donc sur $\hat{\pi}_{red} : (T \times_S X)_{red} \rightarrow S$. Soit \mathcal{X} le cycle relatif défini par π . Comme la notion de famille analytique (resp. continue) de cycles est stable par changement de base, $\hat{\pi}$ est aussi géométriquement plat de pondération $\Theta^*(\mathcal{X}) := \hat{X}$ associée à la famille $(X_{\eta(t)})_{t \in T}$.

(2) Compatibilité avec les inclusions ouvertes sur X :

Si U est un ouvert de X dont l'image par π est l'ouvert S_U et $j : U \rightarrow X$ l'injection naturelle. Alors, de façon naturelle, le morphisme induit $\pi : U \rightarrow S_U$ est aussi géométriquement plat.

(3) Compatibilité avec les images directes de cycles

Soit $X \xrightarrow{f} Z$ un diagramme commutatif de S -morphisms d'espaces

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & S & \end{array}$$

complexes réduits avec f propre et surjectif. Soient $F := f \times Id : S \times X \rightarrow S \times Z$ le morphisme propre déduit de f et \mathcal{X} le cycle relatif pondérant π . Il est facile de voir que $F_*(\mathcal{X})$ est une pondération géométriquement plate naturelle de $\tilde{\pi}$.

1.3.8.2. Image réciproque de cycles par un morphisme géométriquement plat et composition.

Il est bien connu que si $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme *plat* d'espaces complexes, l'image réciproque d'un cycle Y de S est bien définie (cf [Fu]) puisque pour tout sous espace Z de S on a $[\pi^*(Z)] = \pi^*[Z]$. Il se trouve qu'elle garde encore un sens si π est analytiquement géométriquement plat. En effet, sa pondération permet de “distribuer” convenablement les multiplicités sur les composantes irréductibles de l'image réciproque ensembliste. D'ailleurs, le *théorème 2* (cf énoncé p.9) permet de décrire et d'explicitier, par le biais du *théorème 0* (cf p.77), le calcul des multiplicités. Comme ces questions sont plus ou moins liées à la théorie de l'intersection que nous n'aborderons pas, nous renvoyons le lecteur, pour plus d'informations en la matière, au §8, p.130 de [Fu] ou à la page 840 de [B.M] proposant les résultats connus de Fulton mais exprimés dans le langage de l'espace des cycles et en terme de la notion de famille analytique de cycles paramétrée par un espace complexe **lisse**.

1.3.8.2.0. Image réciproque d'un cycle.

Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme analytiquement géométriquement plat de poids \mathfrak{X} . Soit Y un sous ensemble irréductible de S et $\pi^{-1}(Y) = \bigcup_m \mathcal{Y}_m$ la décomposition en composantes irréductibles de son image inverse. Soit alors μ_m le plus petit degré de ramification donnée par les factorisations locales de π le long de \mathcal{Y}_m (cf (1.0.1.2)). On pose, alors,

$$\pi^*(Y) = \sum_m \mu_m \mathcal{Y}_m$$

et on l'appelle image réciproque analytiquement géométriquement plate de Y . Il est absolument clair que cette opération s'étend par linéarité à un cycle quelconque $Y = \sum_{i \in I} k_i Y_i$ (la somme étant toujours supposée localement finie et Y_i irréductible)

en définissant une application $\pi^* : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(X)$.

On peut remarquer que cette image réciproque s'exprime naturellement en fonction de la pondération. En effet, pour chaque entier i , le changement de base $Y_i \hookrightarrow S$, donne un cycle bien défini par la relation $\mathfrak{Y}_i := \mathfrak{X} \bullet (Y_i \times X)$ correspondant à la pondération analytiquement géométriquement plate de $\text{Red}(Y_i \times_S X) \rightarrow Y_i$ et représentant le graphe de la famille analytique (resp. continue) de cycles déduite de la famille analytique (resp. continue) $([\pi^{-1}(s)])_{s \in S}$. Cela nous permet de distribuer convenablement les multiplicités sur chacune des composantes irréductibles de $\pi^{-1}(Y_i)$ et de poser

$$\pi^*(Y) := \sum_{i \in I} k_i \mathfrak{Y}_i$$

1.3.8.2.1. Image réciproque d'une famille cycles.

L'image réciproque d'une famille analytique (resp. continue) de cycles par un morphisme géométriquement plat se définit de façon similaire (cf [B.K] ou [Si]).

En effet, si $\pi : X \rightarrow Z$ est un morphisme géométriquement plat de poids \mathfrak{X} et $(\mathcal{C}_s)_{s \in S}$ une famille analytique ou continue de cycles de Z paramétrée par l'espace complexe réduit S . Alors, pour chaque $s \in S$, on définit, comme précédemment, le cycle $X_{\mathcal{C}_s} := \pi^*(\mathcal{C}_t)$ comme le graphe de la famille analytique ou continue déduite du changement de base $\mathcal{C}_s \hookrightarrow Z$.

1.3.8.2.3. Composition de morphismes géométriquement plats.

Disons tout de suite que la classe des morphismes analytiquement géométriquement plats n'est, en général, pas stable pour la composition comme le montre le contre exemple de [B1] cité dans §(1.1), (iii), p.28. Par contre, celle des continûment géométriquement plats l'est.

Commençons par voir, dans le cas propre, où se nichent les éventuelles obstructions. Soit $\pi_1 : X \rightarrow S$ (resp. $\pi_2 : S \rightarrow T$) un morphisme analytiquement géométriquement plat de dimension relative n_1 (resp. n_2). Si ces morphismes sont propres, on a des plongements analytiques $\eta_1 : S \rightarrow B_{n_1}(X)$ (resp. $\eta_2 : T \rightarrow B_{n_2}(S)$) donnant une application analytique $\eta : T \rightarrow B_{n_2}(S) \rightarrow B_{n_2}(B_{n_1}(X))$. Alors, montrer que la composée $\pi := \pi_2 \circ \pi_1$ est analytiquement géométriquement plate revient exactement à montrer que l'application génériquement holomorphe $\psi : B_{n_2}(B_{n_1}(X)) \rightarrow B_{n_1+n_2}(X)$ se prolonge analytiquement. Il en résultera que l'application continue et génériquement holomorphe $T \rightarrow B_{n_1+n_2}(X)$ est en fait analytique; ce qui traduit la platitude géométrique analytique de π .

Si la base est **faiblement normale** et sans condition de propreté, on a le résultat positif (cf [Si], *proposition 5.12*, p.262) pour les morphismes fortement géométriquement

plats selon notre terminologie. Il n'est pas difficile de le donner sous la forme générale

Proposition 1. *Soient $\pi_1 : X \rightarrow S$ et $\pi_2 : S \rightarrow T$ des morphismes analytiquement géométriquement plats d'espaces analytiques complexes réduits (dénombrables à l'infini) avec T faiblement normal. Alors la composée $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme analytiquement géométriquement plat.*

Démonstration. Comme le problème est de nature locale, considérons un point x_0 de X dans $S \times U \times B$ et une écaille adaptée à S_{t_0} près de $\pi_1(x_0)$ donnée par le T -plongement $S \hookrightarrow T \times U' \times B'$ et une écaille adaptée à $X_{\pi_1(x_0)}$ (autour de x_0) relative au plongement $X \hookrightarrow S \times U \times B \hookrightarrow T \times U' \times U \times B' \times B$. associées aux applications analytiques $f_{X/S} : S \times U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$ et $g_{S/T} : T \times U' \rightarrow \text{Sym}^{k'}(B')$ elles mêmes associées aux morphismes *trace*: $\mathcal{T}_f^0 : \pi_{1*}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U}$ et $\mathcal{T}_g^0 : \pi_{2*}(\mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{O}_{T \times U'}$. $f_{X/S}$ et $g_{S/T}$ permettent de construire un morphisme $h : T \times U \times U' \rightarrow \text{Sym}^{kk'}(B \times B')$ obtenu en composant les applications holomorphes suivantes:

$$\begin{aligned} g_{S/T} \times \text{Id}_U &: T \times U' \times U \rightarrow \text{Sym}^{k'}(S \times U) \\ \text{Sym}^{k'}(f_{X/S}) &: \text{Sym}^{k'}(S \times U) \rightarrow \text{Sym}^{kk'}(S \times B) \\ \text{Sym}^{kk'}(p \times \text{Id}_B) &: \text{Sym}^{kk'}(S \times B) \rightarrow \text{Sym}^{kk'}(B' \times B) \end{aligned}$$

où $p : S \rightarrow B'$ est la composée de la projection sur B' avec le plongement de S dans $T \times U' \times B'$. h est manifestement analytique puisqu'il est associé au morphisme *trace* (dédit de \mathcal{T}_f^0 et $\mathcal{T}_g^0 \otimes \text{Id}_U$):

$$\mathcal{T}_h : (\pi_2 \circ \pi_1)_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_{T \times U' \times U}$$

La faible normalité de l'espace des paramètres assure l'analyticité du changement de projection ([B1], *théorème 2*, p.42) et donc le résultat. ■

1.3.8.2.3. Remarques.

Dans ce qui précède, nous avons implicitement utiliser les propriétés fondamentales des morphismes traces :

- Si $f : X \rightarrow S$ et $g : S \rightarrow T$ sont deux morphismes finis et géométriquement plats, la famille $(f(g^{-1}(U)))_{U \in T}$ indexées par les ouverts de T est une base d'ouverts de S
- la composée des traces est la trace des composées.
- Par ailleurs la pondération naturellement induite par la composée des morphismes π_1 et π_2 est définie par une intersection de cycles décrites de la façon suivante :

Soit \mathcal{X}_1 (resp. \mathcal{X}_2) la pondération de π_1 (resp. π_2) qui est un cycle de $X \times S$ (resp. $S \times T$) et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times S \times T & & \\
 & \swarrow p_2 & \downarrow p & \searrow p_1 & \\
 S \times T & \xleftarrow{\pi_1 \times id} & X \times T & \xleftarrow{id \times \pi_2} & X \times S \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S & \xrightarrow{\pi_2} & T & \xleftarrow{\pi_2} & S
 \end{array}$$

Alors la pondération de π est donnée par le cycle \mathcal{X} de $X \times S$ vérifiant

$$p^*(\mathcal{X}) = p_1^*(\mathcal{X}_1) \bullet p_2^*(\mathcal{X}_2)$$

ou bien (à équivalence analytique près)

$$\mathcal{X} = p_1^*(\mathcal{X}_1) \bullet p_2^*(\mathcal{X}_2) \cap [S \times S]$$

La condition d'incidence, qui est naturellement satisfaite, permet de donner un sens à ce cap produit.

On peut sensiblement améliorer la proposition précédente en donnant la

Proposition 2. *Avec les hypothèses de la proposition 1 et en supposant S faiblement normal et T seulement réduit. La composée est analytiquement géométriquement plate.*

Démonstration. En vertu de la proposition 7 de (1.3.9), T est nécessairement faiblement normale et dans ce cas le résultat découle de la proposition 1. ■

1.3.9. Quelques petits résultats.

Les résultats les plus significatifs font l'objet de [KII].

Proposition 3.

(i) ([B.M], Prop.2, p.814). Soit $(X_s)_{s \in S}$ une famille analytique de cycles d'un espace complexe Z paramétrée par un espace réduit S . Alors la fonction

$$\nu : S \times Z \rightarrow \mathbb{N}; (s, z) \rightarrow \text{mult}_z(X_s)$$

est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski.

(ii) ([B.M], Prop.A1, p.839). Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme équidimensionnel et ouvert d'espaces complexes réduits. Alors, l'ensemble des points de X en lesquels π n'est pas géométriquement plat est un ouvert dense (et même de Zariski !).

Proposition 4.

(i) ([Si], Prop.5.8), [B1]. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme ouvert et surjectif d'espaces complexes dont les fibres génériques sont de dimension constante sur S faiblement normal. Alors π est (fortement) géométriquement plat si et seulement si pour tout point $x \in X$ et une certaine projection (donc pour toute) $\eta : W \rightarrow U$, $x \in W$ ouvert de X et $V = \pi(W)$, le revêtement ramifié $(\pi, \eta) : W \rightarrow V \times U$ est de degré constant.

(ii) [Sib], Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme ouvert et surjectif d'un espace complexe X localement de dimension pure sur un espace complexe S localement irréductible. Alors π est continûment géométriquement plat.

On remarque que sur une base faiblement normal, les notions de “continûment géométriquement plat” et “analytiquement géométriquement plat” coïncident et se vérifient sur **une** installation locale choisie !

Comme corollaires du *théorème 2* de [KII], on obtient

Proposition 5. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme ouvert et de corang constant, avec S réduit de dimension pure. Alors

(1) π est continûment géométriquement plat si et seulement si pour tout point s_0 de S , il existe un voisinage ouvert S_0 de s_0 dans S tel que pour **toute** installation locale S_0 -adaptée, $X \xrightarrow[\pi]{f} Y \xrightarrow{p} S_0$ avec f ouvert, fini et surjectif sur Y lisse

sur S_0 , il existe une application continue $\Psi^\pi : Y \rightarrow \coprod_{r \geq 0} \text{Sym}^r(X_{red})$

(2) π est analytiquement géométriquement plat (ou plus simplement géométriquement plat) si et seulement si pour tout point s_0 de S , il existe un voisinage ouvert S_0 de s_0 dans S tel que pour **toute** installation locale S_0 -adaptée (comme ci-dessus), il existe un entier k (appelé degré géométrique) et une application analytique $\Psi^\pi : Y \rightarrow \coprod_{r \geq 0} \text{Sym}^r(X_{red})$ se factorisant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\Psi_\pi} & \coprod_{r \geq 0} \text{Sym}^r(X_{red}) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \text{Sym}^k(X_{red}) &
 \end{array}$$

Proposition 6. ([KII], corollaire 4, p.35) Soient $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme universellement n -équidimensionnel d'espaces complexes réduits et $\Psi_{gen}^\pi : S_{gen} \rightarrow \mathcal{C}_*(X) \setminus \{0\}$ l'application naturelle associée donnée par $s \rightarrow [\pi^{-1}(s)] := \sum_i \mu_{i,s} [X_{i,s}]$ où $X_{i,s}$ désignent les composantes irréductibles et les entiers $\mu_{i,s}$ les multiplicités associées. On a

- (i) si S est localement irréductible alors π est continûment géométriquement plat.
- (ii) si S est faiblement normal et π continûment géométriquement plat alors il est analytiquement géométriquement plat.
- (iii) si S est normal alors π est analytiquement géométriquement plat.

Proposition 7. Si $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme géométriquement plat avec X faiblement normal alors S est faiblement normal.

Démonstration. Il nous faut montrer que toute fonction continue et génériquement holomorphe sur S se prolonge globalement en une fonction holomorphe.

Comme le problème est de nature locale sur S , π étant géométriquement plat, donc universellement équidimensionnel à fibres de dimension pure n et le problème de nature locale sur S , on peut se fixer une factorisation locale $X \rightarrow S \times U \rightarrow S$ dans laquelle U est un polydisque ouvert relativement compact de \mathbb{C}^n . Il va de soi que le problème se ramène au cas où π est géométriquement plat et fini.

Supposons donc π fini et considérons une fonction h continue et génériquement holomorphe sur S . Comme h est méromorphe localement bornée, elle définit naturellement une section du faisceau \mathcal{L}_S^0 . L'image réciproque de h par π est continue et définit une section du faisceau \mathcal{L}_X^0 (fonctorialité des faisceaux \mathcal{L}_\bullet^k). Mais X étant faiblement normal et $\pi^*(h)$ méromorphe continue se prolonge, alors, holomorphiquement sur X .

Alors, utilisant les faits que la platitude géométrique de π est équivalente à la donnée d'un morphisme trace $\mathcal{T}_f^0 : f_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_S$ et que la composée du pull back et de la trace donne le morphisme $deg(f).Id$, il nous est facile de conclure ■.

1.4. Analogie avec les morphismes plats.

Les morphismes analytiquement géométriquement plats possèdent des propriétés analogues à celles des morphismes plats et de Tor-dimension finie entre espaces complexes **réduits** à savoir :

- (i) ils sont stables par restriction ouvertes sur X et S . La propriété d'être analytiquement géométriquement plat est une condition ouverte sur X .
- (ii) ils sont stables par changements de bases. A noter que les morphismes de

Tor-dimension finie ne vérifient cette propriété que pour les changements de bases cohomologiquement transversaux.

(iii) En tant que morphismes universellement équidimensionnels, ils se factorisent toujours, au moins localement par rapport à chacune de leurs fibres, en morphismes finis suivis de projections. Mais étant géométriquement plats (essentiellement par construction de l'espace des cycles), les morphismes finis de la factorisation locale sont toujours géométriquement plats. Signalons que la factorisation locale d'un morphisme de Tor-dimension finie possède déjà cette propriété d'hérédité puisque le morphisme fini de la factorisation est de Tor-dimension finie mais généralement fausse dans le cas plat car sinon les fibres seraient des espaces de Cohen Macaulay!.

(iv) ils sont caractérisés par l'existence de morphismes trace dans toute factorisation locale; les morphismes plats ou de Tor-dimension finie induisent des morphismes traces qui ne suffisent pas à les caractérisés.

(v) ils ne sont pas stables par composition alors que les plats le sont! Cette lacune constitue l'obstruction majeure à l'élaboration d'une théorie de l'intersection avec paramètres dans ce cadre.

(vi) Les morphismes de Tor-dimension finie d'espaces complexes réduits sont analytiquement géométriquement plats (cf [KII], *corollaire 5*, p.35).

II. Morphisme géométriquement plat et intégration de classes de cohomologie sur les fibres.

2.0. L'intégration de classes de cohomologie de type (n, n) sur une famille analytique de n -cycles d'un espace complexe donné remonte au moins à l'article inaugural [A.N] de A. Andréotti et F. Norguet. Certes le cadre y était assez restrictif puisque quasi-projectivité de l'ambient et faible normalité de l'espace des paramètres étaient imposées, mais force est de constater que la technique fondamentale était clairement mise en lumière. La généralisation se fait principalement en trois étapes. En utilisant l'espace analytique réduit des cycles compacts d'un espace complexe, Barlet montre dans [B1] que le résultat principal de [A.N] est encore vrai sous l'hypothèse de quasi-projectivité de l'ambient mais sans aucune hypothèse, autre que réduit, sur l'espace des paramètres. L'étape intermédiaire consiste à se défaire de l'hypothèse lourde de quasi-projectivité en imposant seulement à l'ambient d'être une variété analytique complexe; ce qui est fait dans [B3]. L'étape décisive entreprise par Barlet et Varouchas dans [B.V] consiste à passer outre la condition de lissité précédente et la condition de compacité sur les cycles en considérant des familles analytiques locales. Les problèmes techniques soulevés

par cette généralisation ultime sont fondamentalement de deux ordres à savoir : faire face au défaut de l'isomorphisme de Dolbeault et comment assurer la finitude des intégrales sur des cycles non compacts. Concernant, l'intégration de classes de type quelconque, on peut signaler qu'un théorème optimal a été donné par l'auteur dans [K2].

La construction repose essentiellement sur l'utilisation d'un " bon " découpage des classes de cohomologie, technique apparaissant comme une conséquence importante du Lemme de Reiffen [R]:

Proposition .

Soient $S \subset X \subset Z$ des sous ensembles analytiques complexes d'un espace analytique complexe Z tels que $\dim S < n$ et $X - S$ soit lisse de dimension pure n . Alors pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur Z , on a :

i) $H_c^k(V, \mathcal{F}|_V) = 0$ pour tout $k > n$ et tout ouvert V de X .

ii) Pour tout recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $X - S$, le morphisme canonique

$$\bigoplus_{\alpha \in A} H_c^n(V_\alpha, \mathcal{F}|_{V_\alpha}) \rightarrow H_c^n(X, \mathcal{F}|_X)$$

est surjectif.

iii) Soient $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme surjectif d'espaces analytiques complexes dont les fibres sont de dimension au plus égales à n , \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X . Si π_α et \mathcal{F}_α désignent les restrictions de π et \mathcal{F} à X_α , le morphisme canonique

$$\bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{R}^n \pi_{\alpha!} \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \pi_! \mathcal{F}$$

est surjectif

Il en résulte les annulations $\mathbb{R}^j \pi_! \mathcal{F} = 0 \ \forall j > n, \ \forall \mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$ assurant l'exactitude à droite du foncteur $\mathbb{R}^n \pi_!$ permettant de localiser sur X .

Un cas particulier de ces résultats appelé le lemme du découpage dans [B.V] a été introduit dans [B3] pour pallier l'absence du théorème de Dolbeault-Grothendieck dans le cas singulier.

Rappelons que l'intégration d'une forme ϕ de type (n, n) à coefficients continus sur un espace analytique complexe Z de dimension pure n et de partie régulière notée $\text{Reg}(Z)$ est définie par

$$\int_Z \phi := \int_{Z_{red}} \phi = \int_{\text{Reg}(Z)} \phi$$

Cette intégrale a un sens, en vertu du théorème de Lelong [L], et définit un courant d -fermé appelé *courant d'intégration* de Z que l'on note souvent $[Z]$.

2.1. Classes de cohomologie et représentants $\bar{\partial}$ -fermés sur un espace singulier.

Si X est un espace analytique complexe dénombrable à l’infini et Φ une famille paracompactifiante de supports de X , rappelons que $H_{\Phi}^{n,n}(X) := \text{Ker}(\bar{\partial}|_{\mathcal{A}_{\Phi}^{n,n}(X)})/\bar{\partial}(\mathcal{A}_{\Phi}^{n,n-1}(X))$ désigne le groupe de $\bar{\partial}$ -cohomologie de type (n,n) de X à support dans Φ et $\phi_{n,n} : H_{\Phi}^n(X, \Omega_X^n) \rightarrow H_{\Phi}^{n,n}(X)$ le morphisme canonique qui est ni injectif ni surjectif en général mais un isomorphisme (appelé isomorphisme de Dolbeault) si X est lisse.

2.1.1. Description en Čech du morphisme $H_{\Phi}^q(X, \Omega_X^n) \rightarrow H^q(X, (\Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}_X^{n,\bullet}))$

Le procédé technique, qui remonte à Andréotti [A] ou Harvey [H] est clairement exposé dans [B.V]. Concernant la notion de famille paracompactifiante et de familles duales, recouvrement adapté à une famille de supports, on renvoie le lecteur à [A.B] ou [A.K]. Mais [B.V] et [V1] contiennent les définitions essentielles utilisées ici. Soit X un espace topologique localement compact, paracompact et complètement paracompact (i.e tous ces ouverts sont paracompacts).

Soit \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . Soit $\xi := (\xi_{\alpha_0 \dots \alpha_q}) \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ une q -cocha ne et U un ouvert de X , on définit sa restriction à U par $\xi|_U := \xi_{\alpha_0 \dots \alpha_q}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \cap U}$ et son support⁽¹⁷⁾ par

$$\Sigma(\xi) := \overline{\bigcup_{\xi_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \neq 0} U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}}$$

Soit $(\mathcal{A}_X^{n,\bullet}, \bar{\partial})$ le complexe des formes différentielles indéfiniment différentiables (induite par plongement local) et

$$\mathcal{K}_X^{\bullet} := \Omega_X^n \xrightarrow{i} \mathcal{A}_X^{n,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{n,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \text{ son complexe de Dolbeault.}$$

Alors, un élément $\psi^{n,q} \in \Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}_X^{n,q})$ est appelé *représentant $\bar{\partial}$ -fermé* d’une classe de cohomologie ξ de $H_{\Phi}^q(X, \Omega_X^n)$ s’il existe un recouvrement ouvert \mathfrak{U} de X et un cocycle de Čech $(f, \phi^{n,0}, \phi^{n,1}, \dots, \phi^{n,q-1}) \in \mathcal{Z}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{K}_{q-1}^{\bullet})$ ($\mathcal{K}_{q-1}^{\bullet}$ étant le tronqué en degré q du complexe de Dolbeault) vérifiant (au signe près!)

- f est un représentant de Čech de ξ
- $\delta(f) = 0$, $i(f) = \delta(\phi^{n,0})$, $\bar{\partial}(\phi^{n,0}) = \phi^{n,1}, \dots$ et (surtout!) $\bar{\partial}(\phi^{n,q-1}) = \epsilon(\psi^{n,q})$, $\bar{\partial}(\psi^{n,q}) = 0$.

où $\epsilon : \Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}_X^{n,q}) \rightarrow \mathcal{C}_{\Phi}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{A}_X^{n,q})$ est le morphisme d’augmentation naturel. Cela revient à dire que $\psi^{n,q}$ se “relève”, via le morphisme canonique $H_{\Phi}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{K}_{q-1}^{\bullet}) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}_X^{n,q})$ en un élément dont la “tête” est le représentant de Čech de ξ .

Les $\phi^{n,r}$ se construisent par le procédé classique consistant à prendre une partition de l’unité, (ρ_{α}) , subordonnée à \mathfrak{U} et considérer les opérateurs

⁽¹⁷⁾ Tel qu’il est défini, ce support est généralement plus grand que celui défini par Gode-ment[G]; mais pour un recouvrement ouvert adapté à la famille de support Φ , ces définitions co cident.

$$G_r^q : \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, \Omega_X^n) \rightarrow \mathcal{C}^{q-r-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}_X^{n,r})$$

définis par

$$G_r^q(f)_{\lambda_0 \cdots \lambda_{q-r-1}} := (-1)^{\frac{r(r+1)}{2} + r(n+q)} \sum_{\alpha_0 \cdots \alpha_r} \rho_{\alpha_0} \bar{\partial} \rho_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial} \rho_{\alpha_r} \wedge f_{\alpha_0 \cdots \alpha_r \lambda_0 \cdots \lambda_{q-r-1}}$$

Pour $r = q$, la formule garde encore un sens dans $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{A}^{n,q})$ et il est facile de vérifier la relation

$$\delta G_r^q(f) + G_r^{q+1}(\delta f) = (-1)^{(n+r)} \bar{\partial}(G_{r-1}^q f)$$

donnant, en particulier, pour $q = n$,

$$\psi^{n,n} := (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{\alpha_0 \cdots \alpha_n} \rho_{\alpha_0} \bar{\partial} \rho_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial} \rho_{\alpha_n} \wedge f_{\alpha_0 \cdots \alpha_n}$$

Alors, si $W = \sum_j n_j W_j$ est un n -cycle de X , on définit l'intégration globale en posant

$$\int_W \xi := \sum_j n_j \int_{W_j} \xi := \sum_j n_j \int_{W_j} \psi^{n,n}$$

2.2. Morphismes adaptés à l'intégration.

Soient $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme n - universellement ouvert, Φ la famille de supports constituée des sous ensembles S -propres⁽¹⁸⁾ (ou π -propre) de X , Ψ et Θ deux familles de supports de X .

Par analogie avec [A.B] ou [A.K]⁽¹⁹⁾, On dira que :

- Ψ et Θ sont S -duales si $F \in \Psi \iff F \cap G$ est S -propre $\forall G \in \Theta$,
- Ψ est *adaptée* au morphisme π si tout point s de S admet un voisinage ouvert V tel que $\bigcup_{s \in V} \pi^{-1}(s) \cap \Psi \in \Phi$. Il peut nous arriver de dire que l'ouvert V est (Ψ, Φ) -adapté.
- Une installation locale Ψ -adaptée est la donnée, pour tout point s de S , d'un diagramme commutatif (\clubsuit) du type

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\sigma} & V \times U \times B \\ \downarrow \pi & \searrow f & \downarrow p \\ V & \xleftarrow{q} & V \times U \end{array}$$

⁽¹⁸⁾ Il est connu que Φ est une famille paracompactifiante (cf [A.B] ou [B.M] §2)

⁽¹⁹⁾ Deux familles de supports Ψ et Θ sont dites *duales* au sens de Andréotti- Kaas si $F \in \Psi \iff F \cap G$ compact $\forall G \in \Theta$, et ainsi, X étant un espace analytique complexe donc localement compact, $\bigcup_{G \in \Psi} G = X$, $\bigcup_{F \in \Theta} F = X$

où W est un ouvert X , V un voisinage ouvert Φ -adapté de s dans S , U et B sont des polydisques relativement compacts de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^p respectivement, f est fini, surjectif et ouvert, σ un plongement local, p et q les projections canoniques.

Soient Ξ une classe de cohomologie de $H_{\Phi}^n(X, \Omega_X^n)$ et $\xi \in \Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{A}^{n,n})$ un de ses représentants $\bar{\partial}$ -fermé (i.e $\phi_{n,n}(\xi) = \Xi$), on pose

$$\int_{\pi^{-1}(s)} \Xi := \int_{\pi^{-1}(s)} \xi$$

Pour bien comprendre cette opération, on va commencer par la

2.2.1. Forme locale de l'intégration sur les fibres.

Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme n -universellement ouvert d'espaces complexes réduits. Comme π est n -équidimensionnel, il se factorise, par rapport à l'une quelconque de ses fibres, sous la forme (\clubsuit)

Il paraît évident que la trace jouera un rôle fondamental dans cette opération qui se décompose en une intégration sur les fibres de dimension 0 suivi d'une intégration le long des fibres d'une projection. Avec les notations (et tout ce qui a été sur ces morphismes traces) du §(1.0.3), p.17, on voit que modulo le choix d'une famille de supports adaptée à π pour que $\pi^{-1}(s)$ rencontre $U \times B$ en des fermés B -propres, on peut raisonnablement définir l'intégration sur les fibres. Plus précisément, supposons que $(\pi^{-1}(s))_{s \in S}$ définisse une famille continue de cycles. Alors, relativement à la situation décrite par le diagramme (\clubsuit), on se fixe un point $s \in S$ et un polydisque U' de U ne rencontrant pas l'ensemble de ramification $R(\pi^{-1}(s))$ décrit par les branches locales, $(f_j)_{1 \leq j \leq k}$, de $\pi^{-1}(s)$ sur U' . Si $\xi \in \Gamma(U \times B, \Omega_{U \times B}^q)$, on a, pour toute forme \mathcal{C}^∞ à support compact, $\alpha \in \mathcal{A}_c^{n-q,n}(U')$,

$$\int_{\pi^{-1}(s) \cap (U' \times B)} \xi \wedge f^* \alpha = \int_{\{s\} \times U'} \sum_{j=1}^{j=k} f_j^*(\xi) \wedge \alpha = \int_{\{s\} \times U'} T_f^{q,0}(\xi) \wedge \alpha$$

Cette quantité varie analytiquement en s si et seulement si le morphisme associé à la famille de revêtement de ramifiés $F : S \times U' \rightarrow \text{Sym}^k(B)$ est analytique.

2.2.2. Intégration globale.

Il suffit procéder localement sur X en utilisant tout ce qui précède.

2.2.3. Construction des fonctions holomorphes sur l'espace des n - cycles.

Pour références, nous aurons [B.V], ou [K2]. La construction procède en deux étapes techniques consistant à localiser, traiter le problème, puis globaliser par recollement. Dans la situation locale, c'est-à-dire supposer, dans un premier temps, $Z = U \times B$, avec U et B polydisques relativement compacts de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^p respectivement, fixer

s_0 et un de ses voisinage ouvert S_0 qui soit adapté à un recouvrement localement fini du support $|\pi^{-1}(s_0)|$ (par définition, l'intégration ne dépend que du support du cycle), on établit le résultat d'intégration pour les classes de $H_{c \times B}^n(U \times B, \Omega_{U \times B}^n)$, et ce par un calcul en termes de cochaines de Čech que l'on globalise grâce à Reiffen. Ce résultat est d'une importance capitale pour la suite puisqu'il permet de localiser sur X l'intégration sur les cycles qui est évidemment de nature locale sur S . Pour nous ramener au cas local, on choisit deux familles de supports Φ paracompactifiante et Ψ telle que pour tout s dans S , il existe un voisinage ouvert V de s tel que $\bigcup_{s \in V} |X_s| \subset \Psi$.

Alors, étant donné un cycle X_s , de support noté $|X_s|$, et une classe dans $H_{\Phi}^n(X, \Omega_{X/S}^n)$, Φ étant la famille des fermés S -propres dans X . Comme $\Phi \cap |X_s|$ est contenue dans la famille des compacts de $|X_s|$, cette classe a une image naturelle dans $H_c^n(|X_s|, \Omega_{X/S}^n|_{|X_s|})$ à laquelle on applique le lemme de Reiffen. Remarquons que si X est paracompact et complètement paracompact, l'étendue $\bigcup_{F \in \Phi} F$ de la famille Φ est un ouvert paracompact; ce qui nous permet de prendre X égale à cette étendue, quitte à intersecter avec le support du cycle. Dans ce cas, $\Phi \cap |X_s| = \Phi|_{|X_s|}$ est contenue dans la famille des compacts de X , par hypothèse sur les supports des cycles.

On choisit donc un recouvrement ouvert localement fini $(X_{\alpha})_{\alpha \in A}$ de X muni de diagrammes d'installations locales

$$\begin{array}{ccc} X_{\alpha} & \xrightarrow{\sigma_{\alpha}} & Z_{\alpha} \\ & \searrow \pi_{\alpha} & \downarrow p_{\alpha} \\ & & S_{\alpha} \end{array}$$

L'équidimensionnalité de π et le théorème de paramétrisation locale (théorème de préparation de Weierstrass) permettent de factoriser localement π en l'installant dans un diagramme du type (\clubsuit)

$$\begin{array}{ccc} X_{\alpha} & \xrightarrow{\sigma_{\alpha}} & S_0 \times U_{\alpha} \times B_{\alpha} \\ \downarrow \pi_{\alpha} & \searrow f_{\alpha} & \downarrow p_{\alpha} \\ S_0 & \xleftarrow{q_{\alpha}} & S_0 \times U_{\alpha} \end{array}$$

avec f_{α} fini et surjectif.

Une fois le morphisme bien préparé, on " adapte " le recouvrement en fonction des supports de classes de cohomologie. Dans [B.V] ou [K2], le contexte diffère

légèrement du cadre actuel dans le sens où l'on considère des familles analytiques de cycles d'un espace complexe donné Z sur lesquelles on intègre des classes de cohomologie. Même si cela n'apparaît pas clairement, le passage par le sous espace d'incidence donné par le support du graphe de cette famille est incontournable et inévitable. Pour mener à bien les calculs en termes de cochaines de Čech, on se doit de supposer Z paracompact et complètement paracompact (ou “*hereditarily paracompact*” selon Bredon [Br]), pour garantir un minimum de finitude au niveau des groupes de cohomologie et par voie de conséquence la convergence des intégrales, on considère deux familles de supports Φ et Ψ adéquates sur Z . De toute évidence, l'une va contenir les supports des cycles et l'autre sera choisie de sorte que leurs images inverses dans le support du graphe de la famille soit contenue dans la famille des fermés S -propres. Comme les calculs se font en Čech et que l'on localise à tour de bras, on prendra deux familles de supports duales Φ et Ψ comme précédemment définies.

2.3. Propriétés fonctorielles de l'intégration sur les fibres d'un morphisme géométriquement plat.

Si $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme analytiquement n -géométriquement plat pondéré par un cycle \mathfrak{X} et Φ la famille de supports de X constituées de fermés sur lesquels la restriction de π est propre, on dispose encore d'une intégration compatible avec la structure de cycles que l'on note $\int_{\pi, \mathfrak{X}}$. En effet, Φ étant paracompactifiante et admettant un recouvrement ouvert adapté ([A.K]), ce qui précède s'adapte sans difficulté et donne les principales propriétés fonctorielles de $\int_{\pi, \mathfrak{X}}$ (cf [B.M], [K2]) à savoir :

(1) Compatibilité avec les changements de bases sur S :

Soit $\phi : \tilde{S} \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits et

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\Theta} & X \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\phi} & S \end{array}$$

le diagramme de changement de base associé. Notons $\tilde{\Phi} := \Theta^{-1}(\Phi)$ la famille paracompactifiante déduite de Φ (cf [Br]). Alors, on a le diagramme commutatif

suivant:

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi}^n(X, \Omega_{X/S}^n) & \xrightarrow{\Theta^*} & H_{\tilde{\Phi}}^n(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}^n) \\ \downarrow \int_{\pi, \mathfrak{X}} & & \downarrow \int_{\tilde{\pi}, \Theta^* \mathfrak{X}} \\ H^0(S, \mathcal{O}_S) & \xrightarrow{\phi^*} & H^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \end{array}$$

(2) Compatibilité avec les inclusions ouvertes sur X :

Si U est un ouvert de X dont l'image par π est l'ouvert S_U et $j : U \rightarrow X$ l'injection naturelle. Alors, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi|_U}^n(U, \Omega_{U/S_U}^n) & \xrightarrow{j!} & H_{\Phi}^n(X, \Omega_{X/S}^n) \\ \searrow \int_{\pi_U, \mathfrak{X}|_{S_U \times U}} & & \swarrow \int_{\pi, \mathfrak{X}} \\ & H^0(S, \mathcal{O}_S) & \end{array}$$

dans lequel π_U (resp. $\Phi|_U^{(20)}$) désigne la restriction de π (resp. Φ) à U et la flèche horizontale désigne le prolongement par zéro des sections à supports. usuelle.

(3) Compatibilité avec les images directes de cycles

Soit $X \xrightarrow{f} Z$ un diagramme commutatif de S -morphisms d'espaces

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & S & \end{array}$$

complexes réduits dans lequel π est analytiquement n -géométriquement plat pondéré par \mathfrak{X} , $\tilde{\pi}$ universellement n -équidimensionnel, f propre et surjectif. Soient Φ (resp. $\tilde{\Phi}$) une famille paracompactifiante sur X (resp. Z) S -adaptée c'est-à-dire telles que $f^{-1}\tilde{\Phi}$ soit paracompactifiante et adaptée à π ou que $f^{-1}\tilde{\Phi}$ soit contenue dans Φ . Alors $\tilde{\pi}$ est analytiquement n -géométriquement plat, pondéré par le cycle relatif $(f \times Id_S)_* \mathfrak{X}$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\tilde{\Phi}}^n(Z, \Omega_{Z/S}^n) & \xrightarrow{f^*} & H_{\Phi}^n(X, \Omega_{X/S}^n) \\ \searrow \int_{\tilde{\pi}, (f \times Id_S)_* \mathfrak{X}} & & \swarrow \int_{\pi, \mathfrak{X}} \\ & H^0(S, \mathcal{O}_S) & \end{array}$$

Tout ceci s'interprète facilement en terme d'image directe de faisceaux.

Signalons, à présent, une conséquence du résultat général et optimal de [K1] concernant cette intégration.

⁽²⁰⁾ qui est paracompactifiante puisque X est supposé complètement paracompact

Soient $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme analytiquement géométriquement plat et Φ une famille paracompactifiante de supports adaptée à π (impliquant, en particulier, que $\forall s \in S, \pi^{-1}(s) \cap \Phi$ est contenue dans la famille des compacts de X). Alors, il existe un (unique) morphisme d'intégration d'ordre supérieur sur les cycles

$$\tilde{\sigma}_{\Phi}^{q,0} : H_{\Phi}^n(X, \mathcal{L}_X^{n+q}) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{L}_S^q)$$

vérifiant les propriétés fonctorielles citées plus haut et qui, pour $q = 0$, rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi}^n(X, \Omega_{X/S}^n) & \longrightarrow & H_{\Phi}^n(X, \mathcal{L}_X^n) \\ \downarrow \int_{\pi, x} & & \downarrow \int_{\pi, x} \\ H^0(S, \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & H^0(S, \mathcal{L}_S^0) \end{array}$$

2.4. Remarques.

(i) On pourrait penser que la platitude géométrique analytique de π forcerait l'inclusion $\text{Im}(\tilde{\sigma}_{\Phi}^{0,0}) \subset H^0(S, \mathcal{O}_S)$. Mais il n'en est rien comme le montre l'exemple trivial. D'ailleurs, considérer simplement $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x^2 = zy^2\}$, $X := S \times \mathbb{C}_t$ et la forme méromorphe $\frac{x}{y} dt$ qui est une section du faisceau \mathcal{L}_X^1 . En prenant, comme de coutume, une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{C} , ρ , et intégrant $\rho \cdot \frac{x}{y} dt d\bar{t}$, on trouve trivialement $\frac{x}{y}$. Cette fonction est méromorphe localement bornée mais ni holomorphe ni même continue sur S !

On a donc des inclusions strictes

$$H^0(S, \mathcal{O}_S) \subset H^0(S, \mathcal{O}_S^c) \subset \text{Im} \tilde{\sigma}_{\Phi}^{0,0}$$

D'ailleurs, si tel était le cas, la composée de morphismes géométriquement plats serait automatiquement géométriquement plate. Or ceci est généralement faux (cf (1.1), (iii), p.29).

(ii) En fait, cette intégration généralisée à ce type de forme peut être définie pour n'importe quel morphisme d'espaces analytiques complexes réduits ayant des fibres de dimension bornées par un certain entier n . Pour le voir, prenons, pour simplifier, un morphisme propre $\pi : X \rightarrow S$ de dimension relative générique n . Alors, le théorème d'applatissage géométrique de [B5] montre l'existence d'une modification $\eta : \tilde{S} \rightarrow S$ et d'un diagramme commutatif d'espaces complexes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\Theta} & X \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\eta} & S \end{array}$$

avec $\tilde{\pi}$ fortement analytiquement géométriquement plat (i.e géométriquement plat au sens de [B5]). En utilisant l'image réciproque $\Theta^* \mathcal{L}_X^{n+q} \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{X}}^{n+q}$ et l'isomorphisme $\eta_* \mathcal{L}_{\tilde{S}}^q \simeq \mathcal{L}_S^q$, il est facile de produire un morphisme canonique de faisceaux cohérents

$$\mathbb{R}^n \pi_* \mathcal{L}_X^{n+q} \rightarrow \mathcal{L}_S^q$$

Ce phénomène s'explique par le fait que les faisceaux de ce type de formes méromorphes sont de nature purement globale et ne peuvent détecter la platitude géométrique analytique (ou continue) qui est une notion locale!

III. Faisceaux dualisants, formes régulières et méromorphes régulières.

3.0. Faisceaux dualisants.

Il convient de distinguer le cas algébrique ou analytique compact du cas analytique général.

3.0.0. Pour un aperçu historique plus complet (bien que présenté sous un angle purement algébrique), nous renvoyons le lecteur à [Li].

Rappelons qu'un *module dualisant*, sur une variété algébrique projective X de dimension n définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle \mathbf{k} (resp. un espace analytique complexe compact X de dimension n), est la donnée d'un \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{K}_X et d'un morphisme \mathbf{k} -linéaire appelé *trace* $\int_X : H^n(X, \mathcal{K}_X) \rightarrow \mathbf{k}$ (resp. \mathbb{C}) assurant l'isomorphisme de foncteurs de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules cohérents sur la catégorie des \mathbf{k} (resp. \mathbb{C})-espaces vectoriels donné par

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{K}_X) \simeq H^n(X, \mathcal{F})^* = \mathrm{Hom}(H^n(X, \mathcal{F}), \mathbf{k})$$

Le couple (\mathcal{K}_X, \int_X) , appelé *paire dualisante* (unique à isomorphisme canonique près), représente le foncteur $\mathcal{F} \rightarrow H^n(X, \mathcal{F})^*$ et \int_X correspond à l'identité dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_X)$.

Un exemple absolument fondamental a été donné par **Grothendieck**. En effet, il montre dans [G1] que toute variété projective (pas nécessairement normale) admet une paire dualisante dans laquelle le faisceau \mathcal{K}_X noté ω_X^n est l'unique faisceau cohérent de profondeur au moins deux sur X qui, pour tout plongement σ , de X dans un espace projectif \mathbb{P}_N , coïncide avec $\sigma^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}}^{N-n}(\mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}_N}^N)$. Cette construction s'étend sans aucune difficultés au cas de la géométrie analytique complexe comme peut s'en convaincre aisément le lecteur en consultant le texte clair et instructif de Monique Lejeune Jalabert ([LJ]).

3.0.1. Faisceaux dualisants de Andréotti-Kas-Golovin.

Rappelons que Ramis et Ruget dans [R.R] ont construit, pour tout espaces analytique complexe X , un complexe \mathcal{D}_X^\bullet de \mathcal{O}_X -modules vérifiant les propriétés suivantes:

- (i) Si X est une variété de dimension n , les fibres de ses composantes, en chaque point x de X , sont des $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules injectifs et \mathcal{D}_X^\bullet est une résolution de $\Omega_X^n[n]$.
- (ii) Pour toute immersion fermée $\sigma : X \rightarrow Z$ d'espaces complexes, on a $\mathcal{D}_X^\bullet \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\sigma_*\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_Y^\bullet)|_X$.
- (iii) Il est à cohomologie cohérente avec $\mathcal{H}^k(\mathcal{D}_X^\bullet) = 0$ pour $k < -\text{Prof}(\mathcal{O}_X)$. De plus, si X est de dimension finie n , \mathcal{D}_X^\bullet est d'amplitude $[-n, 0]$ et muni d'une application \mathbb{C} -linéaire appelée *trace*, $T_X : H_c^0(X, \mathcal{D}_X^\bullet) \rightarrow \mathbb{C}$

Si X est de dimension n , le n -ème faisceau d'homologie de ce complexe est exactement le faisceau de Grothendieck (i.e $\omega_X^n = \mathcal{H}^{-n}(\mathcal{D}_X^\bullet)$). Le fait qu'il soit dualisant au sens de la géométrie analytique complexe relève de résultats non triviaux de Andréotti-Kas et Golovin ([A.K],[G]). On profite de cette occasion pour rappeler la notion de faisceau dualisant dans ce cadre.

Soit X un espace complexe et $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$. Soit \mathfrak{U} la famille des ouverts de Stein relativement compacts dans X . Alors, à toute inclusion $U' \subset U$ d'ouverts de \mathfrak{U} est associé, en tout degré k , un morphisme continu d'espaces vectoriels topologiques de type **D.F.S** $\rho_{U',U}^k : H_c^k(U', \mathcal{F}) \rightarrow H_c^k(U, \mathcal{F})$. Pour tout entier k , on désigne par $\mathcal{D}^k(\mathcal{F})$ le faisceau associé au préfaisceau

$$\begin{aligned} U \in \mathfrak{U} &\rightarrow \text{le dual topologique de } H_c^k(U, \mathcal{F}) \\ U' \subset U &\rightarrow \text{le transposé du morphisme } \rho_{U',U}^k \end{aligned}$$

Andréotti et Kas montrent dans [A.K] qu'à tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur l'espace complexe X , est associé, de façon fonctorielle, un faisceau analytique $\mathcal{D}^k(\mathcal{F})$ (appelée *faisceau dualisant* de \mathcal{F}) qui est \mathcal{O}_X -cohérent et vérifie

- $\mathcal{D}^k(\mathcal{F}) = 0$ si $k \notin [\text{Prof}(\mathcal{F}), \text{Dim}(\mathcal{F})]$,
- $\mathcal{D}^k(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^{-k}(\mathcal{F}, \mathcal{D}_X^\bullet)$ et,
- pour tout $U \in \mathfrak{U}$, $\Gamma(U, \mathcal{D}^k(\mathcal{F}))$ est isomorphe au dual fort de $H_c^k(U, \mathcal{F})$.

Golovin ([Go]) généralise ce résultat au cas où \mathcal{F} est seulement un faisceau analytique sur X . Il les appellent *faisceaux d'homologie* associé à \mathcal{F} et les note $\mathcal{H}_k(\mathcal{F})$.

3.1. Formes régulières et méromorphes régulières: Cadre algébrique

3.1.0. Cas absolu.

3.1.0.0. Formes méromorphes régulières.

E. Kunz montre dans une série d'articles ([Ku1], [Ku2], [Ku3]) que toute variété algébrique projective X irréductible et de dimension n porte un faisceau dualisant

$\mathcal{K}_X = \tilde{\omega}_X^n$ dont la construction se fait par recollement relativement aux projections finies. Plus précisément, pour tout morphisme fini et dominant $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_n$, il définit un faisceau \mathcal{O}_X -cohérent ω_π donné par l'isomorphisme

$$\pi_* \omega_\pi = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}}(\pi_* \mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}_n}^n)$$

dont il montre l'indépendance vis-à-vis de la projection finie choisie en utilisant les traces de différentielles. Ce faisceau \mathcal{O}_X -cohérent $\tilde{\omega}_X^n$ est de profondeur au moins deux dans X , coïncide avec le faisceau des formes usuelles aux points lisses de X et est muni d'un morphisme canonique $\mathcal{C}_X : \Omega_X^n \rightarrow \tilde{\omega}_X^n$ et d'une *trace* $\int_X : H^n(X, \tilde{\omega}_X^n) \rightarrow \mathbf{k}$.

Ce faisceau est appelé le faisceau des *formes méromorphes régulières*. Kunz montre que le faisceau $\tilde{\omega}_X^n$, s'identifie à un sous faisceau du faisceau des r -formes méromorphes entièrement caractérisé par la fameuse *propriété de la trace* disant que tout morphisme fini, surjectif et séparable $f : U \rightarrow U'$ d'un ouvert U de X sur une variété normale U' , induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_* f^* \Omega_{U'}^n & \xrightarrow{f^*} & f_* \Omega_U^n & \xrightarrow{f_* \mathcal{C}_U} & f_* \tilde{\omega}_U^n \\ \mathcal{T}_f^0 \otimes Id \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{T}_f^n \\ \Omega_{U'}^n & \xrightarrow{Id} & \Omega_{U'}^n & & \Omega_{U'}^n \end{array}$$

Par un calcul explicite, Kunz et Waldi (cf [K.W]) étendent cette construction au cas des r -formes en définissant le faisceau des r -formes méromorphes régulières et mettant en évidence l'isomorphisme canonique $\tilde{\omega}_X^r \simeq \mathcal{H}om(\Omega_X^{n-r}, \tilde{\omega}_X^n)$. On peut remarquer que pour tout morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ fini et surjectif de variétés compactes de dimension n tel que X soit muni d'un faisceau dualisant \mathcal{F}_X , le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{F}_X)$ est aussi dualisant. Signalons, d'une part, que Kunz généralise sa construction au cas d'une variété algébrique de Cohen - Macaulay et que, d'autre part, Lipman ([Li]) montre que $\tilde{\omega}_X^n$ est encore dualisant si le corps de base est seulement supposé parfait.

3.1.0.1. Formes régulières.

Ces formes émanent naturellement d'une théorie de la dualité. A ce titre, le faisceau de Grothendieck est l'exemple type de faisceau de formes régulières en degré maximal.

On les retrouvent dans le travail de **Elzein** ([E]) bien qu'elles ne soient pas clairement mises en évidence. En effet, utilisant le complexe résiduel K_X^\bullet (c'est-à-dire un complexe de \mathcal{O}_X -modules injectifs d'amplitude $[-n, 0]$ et dont l'image dans la

catégorie dérivée est le *complexe dualisant*) d'un schéma X de dimension n et de type fini sur un corps de caractéristique nulle \mathbf{k} , il montre que le bicomplexe $\mathcal{K}_X^{\bullet,*} = \mathcal{H}om(\Omega_X^\bullet, K_X^\bullet)$ peut être muni d'une structure de complexe différentiel de (Ω_X^\bullet, d) -modules à droite doté de deux différentielles δ et d'_X , la première étant naturellement induite par celle de K_X^\bullet , la seconde est, certes, déduite de la différentielle extérieure usuelle du complexe de de Rham (qui n'est pas \mathcal{O}_X -linéaire!) mais pas dans le sens naïf. Il est, alors, facile de déduire de cette construction que les faisceaux cohérents $\omega_X^\bullet = \mathcal{H}^{\bullet,0}(\mathcal{K}_X^{\bullet,*}[-n, -n])$ satisfont, pour tout $r \leq n$, $\omega_X^r \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-r}, \omega_X^n)$. Ces faisceaux que l'on peut appeler *faisceaux des formes différentielles régulières* sont tous de profondeur au moins deux dans X puisque le \mathcal{O}_X -module cohérent $\omega_X^n := \mathcal{H}^0(K_X^\bullet[-n])$, qui est le faisceau de Grothendieck, l'est. Dans le cas réduit de dimension pure, ils coïncident avec les faisceaux de Kunz.

3.1.1. Cadre algébrique relatif.

3.1.1.0. Rappelons (cf [Ha]) que si $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme de type fini de schémas localement noethériens, le *complexe dualisant relatif* $\mathcal{D}_{X/S}^\bullet$ est un objet de la catégorie dérivée des \mathcal{O}_X -modules à cohomologie cohérente, défini à quasi-isomorphisme près et vérifiant :

(i) Pour tout s fixé, sa restriction à la fibre $\pi^{-1}(s)$ est le complexe dualisant de cette fibre.

(ii) Si π est lisse, $\mathcal{D}_{X/S}^\bullet$ est quasi-isomorphe au complexe $\Omega_{X/S}^n[n]$.

(iii) Si π se factorise en le diagramme commutatif $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} S$ où f est fini et q lisse de dimension relative n sur S , $f_*\mathcal{D}_{X/S}^\bullet \simeq \mathbb{R}Hom(f_*\mathcal{O}_X, \Omega_{Y/S}^n[n])$.

Si X et S admettent des complexes résiduels K_X^\bullet et K_S^\bullet respectivement, on note souvent $\mathcal{D}_{X/S}^\bullet := \pi^!\mathcal{O}_S = \mathbb{R}Hom(\mathbb{L}\pi^*K_S^\bullet, K_X^\bullet)$ qui, pour π plat, admet la représentation canonique composée de faisceaux flasques $\mathcal{K}_{X/S}^\bullet = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\pi^*K_S^\bullet, K_X^\bullet)$.

3.2.1.1 . Formes méromorphes régulières relatives.

Si X et S sont deux schémas noethériens avec X sans composantes immergées (par exemple réduit) et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, n -équidimensionnel et génériquement lisse, Kunz et Waldi ont construit dans [K.W], pour tout entier $k \leq n$, un sous faisceau $\tilde{\omega}_{X/S}^k$ du faisceau des formes méromorphes, dont les sections sont dites *méromorphes régulières relatives*.

On peut remarquer que, si \mathbf{k} est un corps de caractéristique nulle et π un morphisme n -équidimensionnel et génériquement lisse de \mathbf{k} -schémas noethériens sans composantes immergées et munis de complexes résiduels, le n -ème faisceau d'homologie du dualisant relatif $\omega_{X/S}^n := \mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$ est un faisceau \mathcal{O}_X -cohérent de Kunz-

Waldi. En effet, par hypothèse sur X et S , il est sans torsion. De plus, π étant génériquement lisse, $\omega_{X/S}^n$ s'identifie à un sous faisceau du faisceau des formes méromorphes relatives. Il suffit, alors, de montrer que ce faisceau vérifie la *propriété de la trace relative* disant que pour tout morphisme fini ou quasi-fini, surjectif et séparable $f : U \rightarrow U'$ d'un ouvert U de X sur une variété projective lisse sur S et de dimension relative n , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f_* f^* \Omega_{U'/S}^n & \longrightarrow & f_* \tilde{\omega}_{U/S}^n \\ \tau_f^0 \otimes Id \downarrow & & \downarrow \tau_f^n \\ \Omega_{U'/S}^n & \xrightarrow{Id} & \Omega_{U'/S}^n \end{array}$$

Si toutefois l'on ne dispose pas de normalisation de Noether relative, on peut toujours recouvrir X par des ouverts de Zariski munis de morphismes dominants et quasi-finis sur des espaces projectifs relatifs et recourir au "Main lemma" de Zariski. On en déduit donc $\omega_{X/S}^n = \tilde{\omega}_{X/S}^n$. On peut se référer à [Y] ou [L.S] pour de plus amples détails mais en prenant garde aux différentes hypothèses puisque l'un considère comme base un schéma régulier et l'autre, un peu plus général, un schéma excellent sans composantes immergées et vérifiant la condition de prolongement \mathbf{S}_2 de Serre.

3.1.1.2. Formes régulières relatives.

Si π est un morphisme plat de variétés algébriques sur un corps de caractéristique nulle, Elzein (prop. p.89) montre que le \mathcal{O}_X -module bigradué $\mathcal{K}_{X/S}^{\bullet,\star} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^\bullet, \mathcal{K}_{X/S}^\bullet)$ peut être muni d'une structure de complexe double doté de deux différentielles $(d_{X/S}, \delta)$. Tout comme dans le cas absolu, on en déduit aisément que les composantes du complexe différentiel $\omega_{X/S}^\bullet = \mathcal{H}^{\bullet,0}(\mathcal{K}_{X/S}^{\bullet,\star}[-n, -n])$ satisfont, pour tout $r \in [0, \dim X]$,

$$\omega_{X/S}^r = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^{n-r}, \omega_{X/S}^n)$$

et que l'on peut appeler faisceaux des *formes différentielles régulières relatives*. Là encore, si X est réduite sur S et π à fibres de dimension pure n , ces faisceaux coïncident avec les faisceaux relatifs de Kunz- Waldi.

Comme nous l'avions mentionné dans l'introduction et à la lumière de ce qui sera dit dans la suite, ces constructions nous suggèrent la remarque importante suivante :

Si $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme de type fini de schémas noethériens réduits (ou sans composantes immergées avec S excellent) sur un corps de caractéristique nulle,

génériquement lisse et n -équidimensionnel alors $\tilde{\omega}_{X/S}^n$ est de formation compatible à tout changement chande base (entre espaces de même nature que celle de S !) si et seulement si π définit une famille algébrique de n -cycles paramétrée par S .

On en déduira un morphisme canonique $\mathcal{C}_{X/S} : \Omega_{X/S}^n \rightarrow \tilde{\omega}_{X/S}^n$ donnant, en particulier, le morphisme classe fondamentale de Elzein ([E]) si π est plat.

3.2. Formes régulières et méromorphes régulières: le cadre analytique complexe.

3.2.0. Cas absolu.

3.2.0.0. Propriété de la trace absolue.

Elle a déjà été rencontrée dans (1.0.3). Rappelons simplement que, dans le cadre analytique complexe, le théorème de paramétrisation locale (ou de préparation de Weierstrass) permet toujours de réaliser localement un espace analytique de dimension pure n comme un revêtement ramifié au dessus d'un certain polydisque ouvert d'un espace numérique \mathbb{C}^n . Ainsi, tout point x de X admet un voisinage ouvert V muni d'un morphisme $f : V \rightarrow U$ fini surjectif et ouvert sur un certain polydisque ouvert de \mathbb{C}^n . Notons $j : \text{Reg}(X) \rightarrow X$ est l'inclusion naturelle de la partie lisse de X et $(f_j)_{1 \leq j \leq k}$ les branches locales du revêtement ramifié (que l'on suppose être de degré k) définit par f .

Alors, un germe ξ de section en x du faisceau $j_* j^* \Omega_X^n$ est dit vérifier la *propriété de la trace absolue* si la forme $\mathcal{T}_f^n(\xi) := \sum_{j=1}^{j=k} f_j^* \xi$, définie en dehors de la ramification, se prolonge analytiquement à U tout entier pour tout germe de paramétrisation locale de X en x . (cf (1.0.3.1.0)).

Une section du faisceau $j_* j^* \Omega_X^n$, sur un ouvert V de X , vérifie la propriété de la trace absolue si pour chaque point x de V et chaque germe de paramétrisation locale en x , son germe en ce point vérifie la condition précédente.

Plus généralement (et par construction), un germe ξ de section en x du faisceau $j_* j^* \Omega_X^r$ vérifie la propriété de la trace si pour tout germe en x , α , de section du faisceau Ω_X^{n-r} et tout germe de paramétrisation locale $f : V \rightarrow U$ de X en x , la forme méromorphe (holomorphe en dehors de la ramification) $\sum_{l=1}^{l=k} f_l^*(\alpha \wedge \sigma)$ se prolonge analytiquement sur tout U .

3.2.0.1. Formes méromorphes régulières.

La construction de Kunz s'adapte sans difficultés au cadre analytique complexe donnant pour tout espace analytique complexe réduit de dimension pure n un faisceau \mathcal{O}_X -cohérent, $\tilde{\omega}_X^n$, entièrement caractérisé par la propriété de la trace. Il est

facile de voir que les résultats précédemment cités sont encore valables dans ce cadre à savoir qu'il coïncide avec le faisceau de Grothendieck, qu'en tout degré k on les faisceaux $\tilde{\omega}_X^k = \mathcal{H}om(\Omega_X^{n-k}, \tilde{\omega}_X^n)$ sont aussi caractérisés par la propriété de la trace et qu'il est muni d'un morphisme canonique (*classe fondamentale*) $\mathcal{C}_X : \Omega_X^n \rightarrow \tilde{\omega}_X^n$. On peut se référer aux différents articles de Kunz ou à ceux de Kersken ([Ke1], [Ke2]) .

Dans ces écrits apparait déjà, de façon plus ou moins explicite, une certaine description de ce faisceau en terme de cette notion de classe fondamentale (sur laquelle nous nous attarderons dans le prochain paragraphe). Barlet exploite cette idée dans [B2]. En effet, considérant un plongement local de X (dont le lieu singulier sera noté Σ) dans une variété lisse Z et notant j l'inclusion naturelle de la partie lisse de X dans X , la classe fondamentale de X fournit un morphisme *cup-produit* $i_*\Omega_X^r \rightarrow \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{p+r})$ dont on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} j_*j^*(\Omega_X^r) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & \mathcal{H}_\Sigma^1(\Omega_X^r) \\ & \searrow \tilde{\partial}_k \quad \swarrow \mathcal{H}_\Sigma^1(\mathcal{C}_X) & \\ & \mathcal{H}_\Sigma^1(\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{p+r})) & \end{array}$$

On pose, alors, $\hat{\omega}_X^r := \text{Ker } \tilde{\partial}_r$.

Les propriétés intrinsèques de la classe fondamentale, en particulier son indépendance vis-à-vis du plongement choisi, montre que ce faisceau est l'incarnation locale d'un faisceau intrinsèque sur X . Par définition, $\text{Ker } \tilde{\partial}_n$ est le faisceau de Grothendieck. Il en résulte (cf [B2]) que les faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents $\text{Ker } \tilde{\partial}_r$ sont indépendants du plongement choisi et sont, de ce fait, intrinsèques sur tout espace analytique complexe réduit et de dimension pure. Ils sont entièrement caractérisés par la propriété de la trace et vérifient $\hat{\omega}_X^r \simeq \mathcal{H}om(\Omega_X^{n-r}, \omega_X^n)$. Il est alors absolument évident que ces faisceaux sont exactement les faisceaux des formes méromorphes régulières de Kunz. Remarquons, au passage, que, si \mathcal{C}_X^Z désigne la classe fondamentale de X dans Z , [B2] une r - forme génériquement holomorphe σ est une section de ω_X^r si et seulement si $\sigma \wedge \mathcal{C}_X^Z$ se prolonge en une section globale du faisceau $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{r+p})$.

3.3.0.2. Formes régulières.

Le rôle principal est tenu par le faisceau de Grothendieck qui est encore dualisant au sens de la géométrie analytique complexe comme le précise la

Proposition 1. *Soit X un espace analytique complexe de dimension finie. Alors, il existe un unique faisceau cohérent, ω_X^n , sur X vérifiant:*

- (i) pour tout plongement local $\sigma : X \rightarrow Z$ dans un ouvert de Stein d'une variété analytique complexe de dimension N , $\omega_X^n \simeq \sigma^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{N-n}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^N)$.
- (ii) il est dualisant au sens de la géométrie complexe, muni d'un morphisme \mathbb{C} -linéaire continu $\int_X : H_c^n(X, \omega_X^n) \rightarrow \mathbb{C}$ de sorte que le couple (\int_X, ω_X^n) soit une paire dualisante c'est-à-dire que, pour tout ouvert U de Stein d'un recouvrement ouvert de X et tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X ,

$$\mathbb{H}om(U; \mathcal{F}, \omega_X^n) \simeq H_c^n(U, \mathcal{F})'$$

(où le symbole $'$ désigne le dual fort)

Démonstration. (i) Il est facile de se convaincre que le faisceau $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Z}^{N-n}(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^N)$ ne dépend pas du plongement choisi. En effet, sans trop entrer dans les détails sur lesquels nous reviendrons dans [KII], disons que l'on se ramène à un double plongement $X \subset Z_1 \subset Z_2$ muni d'une rétraction de Z_2 sur Z_1 et l'on utilise une suite spectrale classique à laquelle on applique les annulations, non moins classiques des faisceaux “ $\mathcal{E}xt$ ” (on peut renvoyer le lecteur à [Go] où à [LJ] par exemple).

(ii) La construction de la flèche $H_c^n(X, \omega_X^n) \rightarrow \mathbb{C}$ découle du morphisme *trace absolu* défini sur le complexe dualisant de Ramis et Ruget. En effet, comme $\mathcal{H}^j(\mathcal{D}_X^\bullet) = 0$ pour tout $j < -n$ et que $\mathcal{H}^{-n}(\mathcal{D}_X^\bullet) = \omega_X^n$, on voit que la trace $\mathcal{T} : H_c^0(X, \mathcal{D}_X^\bullet) \rightarrow \mathbb{C}$ détermine entièrement le morphisme de faisceaux de groupes abéliens $\mathcal{T} : H_c^n(X, \omega_X^n) \rightarrow \mathbb{C}$ puisque la suite spectrale $E_2^{i,j} = H_c^i(X, \mathcal{H}^j(\mathcal{D}_X^\bullet)) \implies H_c^{i+j}(X, \mathcal{D}_X^\bullet)$, vérifiant $E_2^{i,j} = 0$ pour $j < -n$, donne le morphisme latéral $H_c^n(X, \mathcal{H}^{-n}(\mathcal{D}_X^\bullet)) \rightarrow H_c^0(X, \mathcal{D}_X^\bullet)$ que l'on peut d'ailleurs déduire du morphisme canonique $\mathcal{H}^0(\mathcal{D}_X^\bullet[-n]) \rightarrow \mathcal{D}_X^\bullet[-n]$ auquel on applique le foncteur hypercohomologique exacte à droite $\mathbb{H}_c^n(X, -)$.

Il reste à voir qu'il est bien dualisant au sens de la géométrie analytique complexe. Or cela résulte immédiatement de la construction de [A.K] ou [Go] puisque $\omega_X^n := \mathcal{D}^n(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}_n(\mathcal{O}_X)$. De plus, pour tout plongement local, σ , de codimension p de X dans une variété de Stein lisse Z et tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , on a $\mathcal{D}^n(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{E}xt^{N-n}(i_*\mathcal{F}, \Omega_Z^N)$ donnant, par recollement,

$$\mathcal{D}^n(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X^n)$$

Mais d'après [A.K] ou [Go], pour tout ouvert U d'un recouvrement de X , $\Gamma(U, \mathcal{D}^n(\mathcal{F}))$ est isomorphe au dual fort de $H_c^n(U, \mathcal{F})$.

Il s'en suit que (\int_X, ω_X^n) est bien une paire dualisante au sens de la géométrie complexe. ■

Encore une fois, nous conseillons au lecteur de consulter [LJ] pour se faire une idée de l'utilisation des outils de la géométrie analytique complexe dans la construction de la trace par exemple.

Pour les formes régulières de degrés intermédiaires, il est important de noter que la construction de Elzein (cf (3.1.0.1)) est transposable à ce cadre moyennant un effort considérable effectué par Kersken ([Ke], [Ke1], [Ke2]) qui réussit le tour de force de définir, pour toute algèbre analytique non nécessairement réduite \mathcal{A} , un complexe différentiel de *formes régulières* $\omega_{\mathcal{A}}^{\bullet}$ sur l'algèbre différentielle de de Rham $(\Omega_{\mathcal{A}}^{\bullet}, d)$ vérifiant, en tout degré r , $\omega_{\mathcal{A}}^r = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}}^{n-r}, \omega_{\mathcal{A}}^n)$. Ainsi, par globalisation en vertu du lemme de Grothendieck-Frisch, pour tout espace analytique complexe de dimension finie n , les faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents $\mathcal{H}om(\Omega_X^{n-r}, \omega_X^n)$ peuvent être considérés comme les faisceaux des formes régulières de la géométrie algébrique. Alors,

Proposition 2. *Si X est un espace analytique complexe réduit de dimension pure n , on a, pour tout entier $r \leq n$,*

$$\tilde{\omega}_X^r = \hat{\omega}_X^r = \omega_X^r = \mathcal{D}^n(\Omega_X^{n-r})$$

Démonstration. On a déjà vu que $\tilde{\omega}_X^r = \hat{\omega}_X^r$. L'identification canonique $\tilde{\omega}_X^r = \omega_X^r$ découle évidemment du travail conséquent de [Ke]. Enfin, de [A.K] ou [Go] résulte l'isomorphisme

$$\mathcal{D}^n(\Omega_X^{n-r}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-r}, \omega_X^n)$$

dont on peut se convaincre aisément en procédant localement puis par recollement sur X . En effet, supposons ce dernier localement plongé en codimension p dans une variété de Stein lisse Z de dimension $n+p$, alors, on a $\mathcal{D}^k(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{E}xt^{N-k}(\sigma_*\mathcal{F}, \Omega_Z^N)$, pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X . D'où, en particulier, pour $k := n$ et $\mathcal{F} := \Omega_X^{n-r}$, les faisceaux $\mathcal{E}xt^{N-n}(\sigma_*\Omega_X^{n-r}, \Omega_Z^N)$, qui, en vertu de dégénérescence de suites spectrales classiques, sont isomorphes aux faisceaux $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\sigma_*\Omega_X^{n-r}, \mathcal{E}xt^{N-n}(\sigma_*\mathcal{O}_X, \Omega_Z^N))$, qui nous donnent après recollement sur X , l'isomorphisme (ou l'identification) canonique désiré. Ces faisceaux cohérents $\mathcal{D}^n(\Omega_X^{n-r})$ sont des faisceaux dualisants au sens de [A.K] et coïncident avec les faisceaux des formes régulières. ■

3.2.0.3. Formes méromorphes régulières et courants.

On dispose, grâce à [E1], d'un résultat explicite comparant les résidus de Grothendieck et de Herrera. En effet, il y est montré que, pour toute paramétrisation locale d'un espace analytique complexe de dimension pure n $X \xrightarrow[\quad f \quad]{\quad \sigma \quad} Z := U \times B \xrightarrow{\quad q \quad} U$ et

toute système (g_1, \dots, g_p) de fonctions holomorphes sur Z et définissant une suite régulière sur X en un point générique x . Alors, si l'on désigne par Res^G (resp. Res^H) le résidu de Grothendieck (resp. Herrera), on a, pour toute section w de $\Gamma(Z, \Omega_Z^{n+p})$,

$$\mathcal{T}_f \left[\text{Res}_{g_j}^H \left(\frac{w}{g_1 \cdots g_p} \right) \right] = (2i\pi)^n \pi_* [X] \wedge \text{Res}^G \left[\frac{w}{g_1 \cdots g_p} \right]$$

\mathcal{T}_f étant l'image directe au sens des courants telle qu'elle a été décrite dans **(1.0.3.1.0)** (p.17).

Par ailleurs, [B2] met en évidence une description du faisceau de Kunz en terme de courants “holomorphes” sur X . Plus précisément, les considérations locales précédentes permettent d'écrire toute r -forme méromorphe comme un quotient $\xi = \frac{v}{g}$ où v est une r -forme holomorphe sur Z et g une fonction holomorphe s'annulant sur le lieu singulier Σ de X . D'après Herrera - Lieberman ([H.L]), ξ définit un courant appelé **valeur principale** défini par

$$\langle \mathbf{T}_\xi, \phi \rangle := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{X \cap \{|g| > \epsilon\}} \xi \wedge \phi$$

pour toute forme ϕ de type $(n-r, n)$, C^∞ et à support compact dans X . Il est, d'ailleurs, souvent noté $\xi \wedge [X]$.

Alors, une r -forme méromorphe est une section du faisceau ω_X^r si et seulement si le courant valeur principale associé est $\bar{\partial}$ -fermé; ce qui nous permet d'identifier ω_X^r , au faisceau des courants $\bar{\partial}$ -fermés sur X modulo \mathcal{O}_X torsion.

3.2.1. Cas relatif.

3.2.1.0. Propriété de la trace relative.

Nous renvoyons le lecteur au paragraphe §**(1.0.3.2.1)** (p.21) dans lequel il trouvera tous les détails qu'il désire sur cette notion. Rappelons simplement que :

étant donné un morphisme $\pi : X \rightarrow S$ universellement n -équidimensionnel, il admet en chaque point x de X une factorisation locale $X \xrightarrow{f} Y := S \times U \xrightarrow[\pi]{g} S$ et

X localement plongé dans un espace complexe lisse sur S et du type $S \times U \times B$ avec U (resp. B) un polydisque relativement compact de \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{C}^p). Cela nous définit un revêtement ramifié “générique” d'un certain degré k , de branches locales $(f_l(s, t))_{1 \leq l \leq k}$ et de morphisme classifiant $F : S \times U \rightarrow \text{Sym}^k(B)$. Notons j l'inclusion naturelle du lieu régulier de π dans X (cf p.37).

Alors,

- si pour tout s de S , $F(\{s\} \times U)$ n'est pas contenue dans le lieu singulier $\text{Sym}^k(B)$, on dira qu'un germe de section, en x , du faisceau $j_* j^* \Omega_{X/S}^r$, ξ vérifie la *propriété de la trace relative* si, pour toute paramétrisation locale de X en x , et tout α , germe en x d'une section de $\Omega_{X/S}^{n-r}$, la forme génériquement holomorphe

$$\sum_{l=1}^{l=k} f_l^*(\alpha \wedge \xi) \text{ se prolonge analytiquement sur } S \times U \text{ tout entier;}$$

- sinon, on demande que ce soit vérifiée cette condition sur la composante générique de F (cf §**1.0.3.2**, p.21).

3.2.1.1. Formes régulières relatives.

Si $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme *plat* d'espaces complexes réduits de dimension finie, la construction de [K.W] s'applique sans aucune difficulté et donne en tout degré r , le faisceau des formes méromorphes régulières $\tilde{\omega}_{X/S}^r$ dont les sections sont caractérisées par la *propriété de la trace relative*.

Toujours sous cet aspect local faisant intervenir les algèbres analytiques, Kersken propose dans [Ke] une méthode complètement différente reprenant l'idée qui est à la base de la construction des formes régulières de Elzein (cf (3.1.1.2)). Ce travail utilise les complexes résiduels et de Cousin relatifs et peut représenter un pas non négligeable vers la dualité analytique relative. Plus précisément, si $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ est un morphisme plat d'algèbres analytiques locales avec \mathcal{A} non nécessairement réduite ni de dimension pure (ce qui constitue une sérieuse difficulté technique!) muni de l'algèbre différentielle $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet, d)$ des formes différentielles relatives dotées de la différentielles relative usuelle, Kersken construit un complexe de Cousin relatif $\mathcal{C}_{\Omega^\bullet}(\mathcal{A}/\mathcal{P})$ et un complexe résiduel différentiel $\mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{A}/\mathcal{P})$ de $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet, d)$ -modules tel que pour toute \mathcal{P} -paramétrisation $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ de codimension p (i.e \mathcal{P} -morphisme fini d'algèbres analytiques locales)

$$\mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{A}/\mathcal{P}) = \text{Hom}_{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{P}}^\bullet}(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet, \mathcal{C}_{\Omega^\bullet}(\mathcal{A}/\mathcal{P}))[p, p]$$

et dont la cohomologie de degré 0 donnée par $\text{Ker} : \mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{A}/\mathcal{P})^{0,*} \rightarrow \mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{A}/\mathcal{P})^{1,*}$ est le $(\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet, d)$ - module des formes (génériquement holomorphes) régulières $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{P}}^\bullet$ (analogue des formes régulières du cadre algébrique).

De ce travail conséquent, on peut tirer le

Corollaire1. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme n -plat d'espaces analytiques complexes avec S réduit de dimension pure localement fini. Alors, il existe un faisceau analytique (unique à isomorphisme canonique près) $\omega_{X/S}^n$ vérifiant :

- (i) il est \mathcal{O}_X -cohérent et de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S ,
- (ii) la famille de faisceaux cohérents $\omega_{X/S}^\bullet = \mathcal{H}om(\Omega_{X/S}^{n-\bullet}, \omega_{X/S}^n)$ est munie d'une différentielle non triviale D , faisant de $(\omega_{X/S}^\bullet, D)$ un complexe différentiel de $(\Omega_{X/S}^\bullet, d_{X/S})$ -modules.
- (iii) si X est réduit, $\omega_{X/S}^n$ est le faisceau $\tilde{\omega}_{X/S}^n$ des formes méromorphes régulières caractérisé par la propriété de la trace relative au sens de Kunz-Waldi [K.W].

3.2.1.2. Formes méromorphes régulières.

Comme ces formes émanent, par nature, d'une théorie de la dualité relative, l'occasion nous est donnée de voir l'apport, dans cette direction, de la dualité analytique relative. Malheureusement, elle n'est pas encore au point et reste, d'ailleurs' sous

une forme incomplète et insatisfaisante dans le cas général. Toutefois, dans le cas d'un morphisme propre on dispose d'un vrai théorème de dualité relative grâce à Ramis, Ruget et Verdier. En effet, il est montré, dans [R.R.V], que, pour tout morphisme $\pi : X \rightarrow S$ d'espaces analytiques complexes dénombrables à l'infini de dimension finie munis de leurs complexes dualisants de Ramis-Ruget \mathcal{D}_X^\bullet et \mathcal{D}_S^\bullet , pour tout complexes de faisceaux de \mathcal{O}_X -modules à cohomologie cohérente, A^\bullet et B^\bullet , ce dernier étant à cohomologie bornée à gauche, il existe une flèche canonique⁽³⁾ (et fonctorielle en les arguments)

$$\mathbb{R}\pi_! \mathbb{R}\mathrm{Hom}(X; A^\bullet, \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{D}_S(B^\bullet)), \mathcal{D}_X^\bullet)) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}(S; \mathbb{R}\pi_* A^\bullet, B^\bullet),$$

où $\mathcal{D}_S(B^\bullet) := \mathbb{R}\mathrm{Hom}(B^\bullet, \mathcal{D}_S^\bullet)$, qui est un isomorphisme (algébrique) si π est propre.

Alors, en notant $\mathcal{D}_{X/S}^\bullet := \pi^!(\mathcal{O}_S) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathbb{L}\pi^*\mathcal{D}_S^\bullet, \mathcal{D}_X^\bullet)$, on obtient, grâce à la trace relative construite dans [RRV], un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continue $\mathbb{R}\pi_*\pi^!(\mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{O}_S$

Dans ce cas, le foncteur $\pi^!$ est parfaitement défini, vérifie les propriétés d'usage (cf [H], [L1]) et, est l'adjoint à droite du foncteur $\mathbb{R}\pi_*$. Ainsi, [RRV] a pour conséquences immédiates le

Corollaire2. *Si X et S sont deux espaces analytiques complexes dénombrables à l'infini de dimension finie et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme propre, il existe un foncteur*

$$\pi^! : \mathcal{D}_{coh}^+(S) \rightarrow \mathcal{D}_{coh}^+(X)$$

muni d'un morphisme de foncteurs $\mathbb{R}\pi_\pi^! \rightarrow Id$ vérifiant :*

(i) *il est de nature locale sur X (au sens de Verdier [V]) c'est-à-dire pour deux morphismes propres $\pi_i : X_i \rightarrow S$, $i = 1, 2$ et U un ouvert de X_1 muni de deux inclusions ouvertes $j_i : U \rightarrow X_i$ et tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ X_1 & & X_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & S & \end{array}$$

⁽³⁾ avec des formules analogues obtenues en échangeant $\mathbb{R}\pi_!$ et $\mathbb{R}\pi_*$.

soit commutatif, on a

$$j_1^*(\pi_1^! F) = j_2^*(\pi_2^! F), \quad \forall F \in \text{Coh}(S)$$

(ii) Il est de formation compatible avec la composition des morphismes propres d'espaces analytiques complexes dénombrables à l'infini c'est-à-dire si $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} S$, alors

$$(g \circ f)^! = f^! g^!$$

qui n'est rien d'autre qu'une relecture de [V] dans ce contexte et le

Corollaire 3. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme universellement n -équidimensionnel d'espaces complexes dénombrables à l'infini. Alors, le faisceau analytique $\omega_{X/S}^n := \mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$ vérifie les propriétés suivantes:

(i) il est \mathcal{O}_X -cohérent, de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S , de formation compatible aux inclusions ouvertes sur X et changement de base plat sur S , et coïncide avec le faisceau des formes holomorphes relatives sur la partie régulière de π .

(ii) il munit π d'un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu $\int_\pi : \mathbb{R}^n \pi_* \omega_{X/S}^n \rightarrow \mathcal{O}_S$ de formation compatible à tout changement de base plat et à la composition des morphismes propres et universellement équidimensionnels dans le sens où tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\Psi} & X_1 \\ & \searrow \pi_2 & \swarrow \pi_1 \\ & S & \end{array}$$

avec π_1 , Ψ et π_2 universellement équidimensionnels et propres de dimension relative respective n_1 , n et $n_2 := n_1 + n$, donne un diagramme commutatif de faisceaux cohérents

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \pi_{2*} \omega_{X_2/S}^{n_2} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^{n_1} \pi_{1*} \omega_{X_1/S}^{n_1} \\ & \searrow \int_{\pi_2} & \swarrow \int_{\pi_1} \\ & \mathcal{O}_S & \end{array}$$

Démonstration.

(i)

• La *cohérence* découle immédiatement du fait que le complexe $\pi^! \mathcal{O}_S$ est à cohomologie cohérente. En effet, le problème étant de nature locale sur X et les morphismes universellement n -équidimensionnels admettant une réalisation locale du type

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ & \searrow \pi & \downarrow q \\ & & S \end{array}$$

avec σ plongement local, Z lisse sur S de dimension relative N , il est facile de voir que, pour tout faisceaux cohérents F et G , les isomorphismes (le second étant celui de Verdier [V])

$$\sigma_* \sigma^! F \simeq \mathbb{R} \mathcal{H}om(\sigma_* \mathcal{O}_X, F), \quad \text{et} \quad q^! G \simeq \Omega_{Z/S}^N[N] \otimes q^* G$$

montrent clairement que $\pi^! \mathcal{O}_S = i^! q^! \mathcal{O}_S$ est à cohomologie cohérente.

• Sa nature *locale* découle directement de celle du foncteur $\pi^!$ (cf *corollaire 2*) et de la stabilité par changement de base des morphismes universellement équidimensionnels.

• Pour vérifier que $\text{Prof}(\omega_{X/S}^n) \geq 2$, on commence par constater que les faisceaux d'homologie du complexe $\pi^!(\mathcal{O}_S)$ sont tous nuls pour $j < -n$. En effet, si l'on suppose X localement donné par l'annulation de p fonctions holomorphes sur Z , on aura

$$\mathcal{H}^j(\pi^! \mathcal{O}_S) \simeq \mathcal{E}xt^{j+N}(\sigma_* \mathcal{O}_X, \Omega_{Z/S}^N)$$

dont l'annulation est assurée pour $j + N < N - n$ (cf le *lemme 2*, p.6 de [KII]).

On en déduit, en particulier, l'incarnation locale $\omega_{X/S}^n \simeq \mathcal{E}xt^{N-n}(\sigma_* \mathcal{O}_X, \Omega_{Z/S}^N)$ qui montre bien que sur la partie $\text{Reg}(\pi)$, le faisceau $\Omega_{X/S}^n$ s'identifie naturellement avec $\omega_{X/S}^n$.

Considérons, à présent, un sous espace $Y \subset X$ de codimension au moins 2 dans X et montrons que

$$\mathcal{H}_Y^0(\omega_{X/S}^n) = \mathcal{H}_Y^1(\omega_{X/S}^n) = 0$$

Pour cela, on peut, soit utiliser la fonctorialité, la stabilité par changement de base des morphismes universellement équidimensionnels et les annulations de cohomologie du dualisant relatif, soit procéder localement sur X au voisinage de Y et se ramener à vérifier les annulations $\mathcal{H}_Y^j(\mathcal{E}xt^{N-n}(\sigma_* \mathcal{O}_X, \Omega_{Z/S}^N)) = 0$ pour $j = 0, 1$ et pour lesquels on renvoie le lecteur au *lemme 3*, p.6 de [KII].

• La *stabilité par changement de base plat* se justifie en utilisant les mêmes arguments que ceux évoqués dans le *théorème 1* ([KII], p.13). On rappelle brièvement que si $\eta : S_1 \rightarrow S$ est un morphisme plat d'espaces complexes réduits et

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\Theta} & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_1 & \xrightarrow{\eta} & S \end{array}$$

le diagramme commutatif (cartésien) de changement de base qui en découle, la stabilité par changement de base des morphismes universellement ouverts et propres nous ramène à établir l'existence d'une flèche (non triviale!) $\Theta^* \omega_{X/S}^n \rightarrow \omega_{X_1/S_1}^n$. Mais Θ étant plat, les égalités fonctorielles $\mathbb{L}\Theta^* = \Theta^*$ et $\mathbb{L}\Theta^* \mathbb{R}\mathcal{H}om(A, B) = \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathbb{L}\Theta^* A, \mathbb{L}\Theta^* B)$ permettent, en utilisant des suites spectrales adéquates, d'aboutir au résultat tout comme il a été fait dans le *théorème 1*.

(ii)

• La construction de ce morphisme d'*intégration* est une conséquence de l'existence de la *trace relative* construite dans [R.R.V]. En effet, comme π est à fibres de dimension bornée par l'entier entier n , les annulations des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^j(\pi^! \mathcal{O}_S)$ pour tout $j < -n$, nous donnent une flèche naturelle (edge) $\mathcal{H}^{-n}(\pi^! \mathcal{O}_S)[n] \rightarrow \pi^!(\mathcal{O}_S)$. Alors, en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\pi_*$ et utilisant la trace déduite de [RRV], on obtient le morphisme

$$\mathbb{R}\pi_* \mathcal{H}^{-n}(\pi^! \mathcal{O}_S)[n] \rightarrow \mathcal{O}_S$$

dont on prend la cohomologie en degré 0 pour aboutir au morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu $\mathbb{R}^n \pi_* \mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S)) \rightarrow \mathcal{O}_S$ rendant, naturellement, commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\pi_* \omega_{X/S}^n[n] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}\pi_* \pi^!(\mathcal{O}_S) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{O}_S & \end{array}$$

De plus, en vertu de ce qui précède, cette flèche est compatible à tout changement de base plat sur S .

• La *compatibilité avec la composition des morphismes* est une conséquence du *corollaire 2*. En effet, il suffit d'utiliser les annulations des images directes issues du lemme de Reiffen, des images inverses extraordinaires mentionnées plus haut et les identifications:

$$\mathbb{H}om(\mathbb{R}\pi_{2*} \omega_{X_2/S}^{n_1+n}[n_1+n], \mathcal{O}_S) \simeq \mathbb{H}om(\mathbb{R}\Psi_* \omega_{X_2/S}^{n_1+n}[n], \pi_1^! \mathcal{O}_S[-n_1])$$

D'où le morphisme canonique de "liaison"

$$\mathbb{R}^n \Psi_* \omega_{X_2/S}^{n+n_2} \rightarrow \omega_{X_1/S}^{n_1}$$

Il s'en suit que, si π_2 et π_1 ont même dimension relative (i.e Ψ génériquement fini), on dispose d'une image directe $\pi_{2*} : \Psi_*(\omega_{X_2/S}^n) \rightarrow \omega_{X_1/S}^n$ ■

On peut facilement en déduire le

Corollaire4. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat dont les fibres sont de dimension n . Alors,

- (i) pour tout entier k , $\omega_{X/S}^k = \mathcal{H}om(\Omega_{X/S}^{n-k}, \omega_{X/S}^n)$ est un faisceau \mathcal{O}_X -cohérent, de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S et représente le faisceau des k -formes régulières sur X ,
- (ii) si X est réduit sur S , ces faisceaux sont les faisceaux des k -formes méromorphes régulières au sens de Kunz-Waldi-Kersken.

3.2.1.3. Remarques

- (i) Dans le cas non propre, bien que l'on ne puisse invoquer de dualité analytique relative, on a tout de même un résultat positif (cf *théorème 1* de [KII]) mettant en évidence un faisceau ω_π^n possédant de nombreuses propriétés parmi lesquelles celle de coïncider avec $\omega_{X/S}^n$ dans le cas propre.
- (ii) Ces constructions nous suggère d'introduire la notion de faisceaux dualisants relatifs analogues des dualisants de Andréotti-Kas-Golovin, en posant, pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X ,

$$\mathcal{D}_{/S}^n(\mathcal{F}) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_{X/S}^n)$$

Ce qui a l'avantage de ne faire intervenir qu'une partie vérifiable de la dualité analytique relative.

Pour terminer, rappelons que le *corollaire (3.1)* donne la condition "optimale" (généralisant le cas plat) pour que de telles formes méromorphes régulières existent. Rappelons le ici pour l'inclure de façon naturelle à ce qui précède.

Corollaire3.1. Soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme n -analytiquement géométriquement plat d'espaces analytiques complexes réduits de dimension localement fini. Alors, il existe un faisceau analytique (unique à isomorphisme canonique près) $\Lambda_{X/S}^n$ sur X vérifiant :

- (i) *il est \mathcal{O}_X -cohérent, de profondeur au moins deux fibre par fibre sur S , compatible aux changements de bases et coïncide avec le faisceau des formes holomorphes relatives sur la partie régulière de π ,*
- (ii) *En chaque point x de X en lequel π est plat, le germe $\Lambda_{X/S,x}^n$ coïncide avec le faisceau des formes méromorphes régulières relatives caractérisé par la propriété de la trace relative.*
- (iii) *De plus, la famille de faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents $\Lambda_{X/S}^\bullet := \mathcal{H}om(\Omega_{X/S}^{n-\bullet}, \Lambda_{X/S}^n)$ est munie d'une différentielle non triviale D , faisant de $(\Lambda_{X/S}^\bullet, D)$ un complexe différentiel de $(\Omega_{X/S}^\bullet, d_{X/S})$ -modules.*

ne nécessite aucun recours à la théorie de la dualité analytique relative qui n'est, d'ailleurs, pas encore au point dans le cas général ni à la construction de Kersken.

IV. Classe fondamentale.

4.0. Cas absolu.

4.0.1. Cadre algébrique.

Pour l'aspect algébrique et enl caractéristique nulle, nous renvoyons le lecteur à [E] (Thm 3.1, p34) où il est montré qu'à toute variété algébrique X admettant un complexe résiduel \mathcal{K}_X^\bullet de complexe dualisant \mathcal{D}_X^\bullet est canoniquement associé un unique morphisme \mathcal{C}_X de $\mathbb{H}om(\Omega_X^n[n], \mathcal{D}_X^\bullet)$, qui est, en fait, une section de l'objet bigradué $K_X^{\bullet,*} = \mathcal{H}om(\Omega_X^*, K_X^\bullet)$ annulée par ses différentielles d_X et δ_X et vérifiant la *Propriété de la trace* disant que pour tout morphisme fini et dominant $f : U \rightarrow U'$, d'un ouvert U de X sur une variété lisse de dimension n , les morphismes traces $\mathcal{T}_f : f_* K_U^\bullet \rightarrow K_{U'}^\bullet$, $\mathcal{T}_f : f_* \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_{U'}$ et le morphisme canonique $f^* : f^* \Omega_{U'}^n \rightarrow \Omega_U^n$ induisent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_* f^* \Omega_{U'}^n[n] & \xrightarrow{f^*} & f_* \Omega_U^n[n] & \xrightarrow{\mathcal{C}_U} & f_* K_U^\bullet \\ \mathcal{T}_f \otimes Id[n] \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{T}_f \\ \Omega_{U'}^n[n] & \xrightarrow{\mathcal{C}_{U'}} & & & K_{U'}^\bullet \end{array}$$

4.0.2. Cadre analytique complexe.

4.0.2.0. Du global au local. Disposant du complexe dualisant \mathcal{D}_X^\bullet de Ramis-Ruget [RR], il est facile de voir que la construction de Elzein s'adapte au cadre analytique complexe (à quelques modifications mineures près!) et permettent de dire qu'à tout n -cycle X d'un espace analytique complexe Z , est canoniquement associé (dans la catégorie dérivée des \mathcal{O}_X -modules) un unique morphisme $\mathcal{C}_X : \Omega_X^n[n] \rightarrow \mathcal{D}_X^\bullet$ compatible aux inclusions ouvertes sur X (i.e de nature locale sur X), compatible avec la différentielle extérieure usuelle (définie au sens des distributions) et vérifiant la *propriété de la trace*, c'est-à-dire que pour toute paramétrisation locale $f : X \rightarrow Y$, Y étant un polydisque ouvert de \mathbb{C}^n , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_* f^* \Omega_Y^n[n] \simeq f_*(\mathcal{O}_X \otimes f^* \Omega_Y^n[n]) & \longrightarrow & f_* \Omega_X^n[n] & \xrightarrow{f_* \mathcal{C}_X} & f_* \mathcal{D}_X^\bullet \\ \mathcal{T}_f^0 \otimes Id[n] \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{T}_f^\bullet \\ \Omega_Y^n[n] & \xrightarrow{Id} & & & \Omega_Y^n[n] \end{array}$$

dans lequel \mathcal{T}_f^\bullet est le morphisme trace défini dans [R.R].

Par construction, les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^j(\mathcal{D}_X^\bullet)$ sont cohérents et nuls pour $j < -n$. Il en résulte que le morphisme \mathcal{C}_X est en fait entièrement caractérisé par le morphisme de faisceaux \mathcal{O}_X -cohérents $\Omega_X^n \rightarrow \mathcal{H}^{-n}(\mathcal{D}_X^\bullet)$ et que l'on note encore (abusivement) \mathcal{C}_X . Supposons X irréductible, localement plongé dans une variété de Stein Z de dimension N et posons $p := N - n$. Alors, la succession de morphismes naturels (dans la catégorie dérivée)

$$\begin{aligned} \mathbb{H}om(\Omega_X^n[n], \mathcal{D}_X^\bullet) &\simeq \mathbb{H}om(\sigma_*\Omega_X^n[n], \mathcal{D}_Z^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}om(\sigma_*\mathcal{O}_X \otimes \Omega_Z^n[n], \Omega_Z^{n+p}[n+p]) \\ &\simeq \text{Ext}^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^p) \simeq \Gamma(Z, \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^p)) \end{aligned}$$

obtenus grâce à la dualité pour un plongement, la lissité de Z et les annulations de cohomologie du complexe dualisant, permet de voir le morphisme classe fondamentale comme une section globale du faisceau cohérent $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^p)$. Il est d'usage d'appeler *classe fondamentale* de X dans Z , l'image de ce dernier élément dans $H_{|X|}^p(Z, \Omega_Z^p)$ via le morphisme canonique $\text{Ext}^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^p) \rightarrow H_{|X|}^p(Z, \Omega_Z^p)$. La classe obtenue est évidemment annulée par tout idéal de définition de X dans Z , par la différentielle extérieure usuelle d et induit un morphisme de \mathcal{O}_X -modules gradués $\Omega_X^\bullet \rightarrow \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{p+\bullet})$.

4.0.2.1. Du local au global. On peut adopter un point de vue ne nécessitant aucun recours au complexe dualisant. Pour cela, la stratégie consiste à passer du local au global par recollement de données simplicielles.

On commence donc par associer, à tout sous ensemble analytique X de codimension pure p dans une variété lisse de Stein Z de dimension $n+p$, une classe de cohomologie dans $H_X^p(Z, \Omega_Z^p)$ vérifiant un certain nombre de propriétés fonctorielles. On se ramène fondamentalement à l'étude du cas classique où X est un point de \mathbb{C}^p que l'on trouve aisément dans la littérature (cf [Gri-H]). Les calculs explicite, en terme de résidu de symboles, montrent que l'élément désiré est en fait une section globale du faisceau cohérent $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^p)$ (s'explicitant au moyen des résolutions de Koszul ou de Dolbeault- Grothendieck) ayant de bonnes propriétés de stabilité vis-à-vis des morphismes finis. Z étant lisse, ces classes définissent naturellement un morphisme $\tilde{\mathcal{C}}_X^\sigma : \Omega_X^n \rightarrow \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_X, \Omega_Z^{n+p})$.

Si $X := \sum_j n_j X_j$ est un n -cycle quelconque d'un espaces analytique complexe Z arbitraire, on procède par localisation en nous ramenant à la situation universelle (cf (1.0.3.1.1)) pour laquelle on montre que la diagonale généralisée σ_k -invariante et donc le sous espace d'incidence $\#$ admet une classe fondamentale, au sens où on l'entend, représenté simplement par un objet de la cohomologie équivariante. Alors,

par image réciproque et utilisant les théorèmes d'annulations de Siu-Trautmann [S.T], on produit une classe de $H_{|X|}^p(U \times B, \Omega_{U \times B}^p)$ et même de $Ext^p(\mathcal{O}_{|X|}, \Omega_{U \times B}^{n+p})$. Ainsi, pour toute installation de X ou écaïlle adaptée (V, σ, U, B) , surgit un morphisme $\tilde{\mathcal{C}}_X^\sigma : \Omega_{|X|}^n \rightarrow Ext^p(\mathcal{O}_{|X|}, \Omega_{U \times B}^{n+p})$. Mais cette collection de morphismes locaux se recollent globalement et définit un morphisme canonique $\tilde{\mathcal{C}}_X : \Omega_{|X|}^n \rightarrow \omega_{|X|}^n$ puisque la collection de faisceaux locaux $Ext^p(\mathcal{O}_{|X|}, \Omega_{U \times B}^{n+p})$ se recollent globalement en le faisceau dualisant de Grothendieck.

La propriété de la trace est vérifiée puisque pour toute paramétrisation locale $f : |X| \rightarrow U$ et tout plongement local σ de $|X|$ dans Z lisse de dimension relative p sur U , on dispose de flèches d'intégration ou résidues:

$$f_*(Ext^p(\sigma_* \mathcal{O}_X, \Omega_Z^{n+p})) \rightarrow f_* \mathcal{H}_{|X|}^p(\Omega_Z^{n+p}) \rightarrow \Omega_Y^n$$

Dès lors, il est facile d'en déduire que $\tilde{\mathcal{C}}_X = \mathcal{C}_X$.

Rappelons que dans le cas d'une intersection complète, on a une description simple de cette classe en terme de cochaines de Čech. Supposons $Z = \mathbb{C}^{n+p}$ et $X = \{z \in \mathbb{C}^{n+p} / f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_p(z) = 0\}$ de dimension pure n , les (f_i) étant des fonctions holomorphes et soit \mathcal{U} le recouvrement ouvert du complémentaire de X dans \mathbb{C}^{n+p} , dont les éléments sont les ouverts $U_i = \{z \in \mathbb{C}^{n+p} / f_i(z) \neq 0\}$. Alors un représentant de Čech-Leray de $C(X)$ est donné par le cocycle

$$\frac{df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_p}{f_1 \cdots f_p}$$

4.0.2.2. Classe fondamentale et intégration

Rappelons que le faisceau ω_X^n est cohérent et dualisant pour le faisceau structural \mathcal{O}_X selon Andréotti- Kas- [A.K]. Alors, utilisant l'intégration usuelle $H_c^n(X, \Omega_X^n) \rightarrow \mathbb{C}$ et le morphisme classe fondamentale $\Omega_X^n \rightarrow \omega_X^n$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(X, \Omega_X^n) & \longrightarrow & H_c^n(X, \omega_X^n) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Dans lequel la flèche $H_c^n(X, \omega_X^n) \rightarrow \mathbb{C}$ n'est rien d'autre que le morphisme *trace absolu* défini sur le complexe dualisant de Ramis et Ruget (cf (3.1.3.1.1)). On obtient, alors, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}om(\omega_X^n, \omega_X^n) & \longrightarrow & \mathbb{H}om_{cont}(H_c^n(X, \omega_X^n), \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}om(\Omega_X^n, \omega_X^n) & \longrightarrow & \mathbb{H}om_{cont}(H_c^n(X, \Omega_X^n), \mathbb{C}) \end{array}$$

dans lequel la notation $\mathbb{H}om_{cont}$ désigne les morphismes \mathbb{C} -linéaire et continues. Ce diagramme met en correspondance l'intégration et le morphisme classe fondamentale qui peut être vu comme l'image de la fonction 1 via le morphisme injectif

$$\mathcal{H}om(\omega_X^n, \omega_X^n) \rightarrow \mathcal{H}om(\Omega_X^n, \omega_X^n),$$

On peut préciser que $\mathcal{H}om(\omega_X^n, \omega_X^n)$ est un sous faisceau de $\mathcal{H}om(\Omega_X^n, \omega_X^n)$ qui est isomorphe au faisceau ω_X^0 contenant \mathcal{O}_X et coïncidant avec ce dernier si X est normal. Si X est réduit, ω_X^0 s'identifie au faisceau des fonctions méromorphes localement bornées.

Signalons qu'il est facile de reconstituer le morphisme d'intégration globale à partir des morceaux locaux. En effet, il suffit pour cela de choisir un recouvrement ouvert localement fini $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X tel que chaque V_α soit muni d'un plongement dans un polydisque Z_α de \mathbb{C}^{n+p} et d'une projection sur un polydisque U_α de \mathbb{C}^n faisant de V_α un revêtement ramifié de U_α . On supposera X paracompact et complètement paracompact pour pouvoir localiser et globaliser au moyen des partitions de l'unité les calculs explicitables en terme de cochaines de Čech. Signalons que l'exactitude à droite du foncteur $H_c^n(X, -)$ permet de localiser sur X .

4.1. Classe fondamentale relative.

4.1.0. Cadre algébrique.

Si \mathbf{k} est un corps de caractéristique nulle et π un morphisme n -équidimensionnel de \mathbf{k} -schémas noethériens munis de complexes résiduels. Alors, Elzein et Angéniol ([E],[A.E]) ont montré l'existence d'un unique (et donc canonique) élément dans $\mathbb{H}om(\Omega_{X/S}^n[n], \mathcal{D}_{X/S}^\bullet)$ vérifiant *la propriété de la trace relative* dans les cas suivants:

- X intersection complète relative sur S quelconque ([E]),
- X est plat sur S réduit ([E]),
- X équidimensionnel sur S normal ([E]),
- X de *Tor-dimension finie* sur S réduit ([E.A]).

Cette construction est compatible aux changements de bases quelconques, réduits, normaux et cohomologiquement transversaux à π respectivement.

Par analogie avec le cas absolu et eu égard à l'équidimensionnalité, la *propriété de la trace relative* exprime le fait que pour toute installation $X \xrightarrow[\pi]{f} Y \xrightarrow{q} S$,

comme ci-dessus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 f^* f_* \Omega_{Y/S}^n[n] \simeq f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^n[n] & \longrightarrow & f_*(\mathcal{O}_X \otimes \Omega_{Z/S}^n[n]) \xrightarrow{f^* \mathcal{C}_X} f_* \mathcal{D}_{X/S}^\bullet \\
 \mathcal{T}_f^0 \otimes Id[n] \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}_f \\
 \Omega_{Y/S}^n[n] := \mathcal{D}_{Y/S}^\bullet & \xrightarrow{Id} & \Omega_{Y/S}^n[n]
 \end{array}$$

dans lequel le morphisme \mathcal{T}_f peut être défini pour tout morphisme propre et surjectif alors que $\mathcal{T}_f^0 : f_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ n'existe pas en général.

4.1.1. Cadre analytique complexe.

En géométrie complexe, la théorie de la dualité analytique relative est encore très loin d'être au point hormis le cas d'un morphisme propre ou lisse en plus de quelques cas sporadiques très particuliers. L'obstacle majeur est qu'actuellement on est dans l'incapacité d'étendre le “foncteur” de la géométrie algébrique $\pi^!$, avec toutes les propriétés qui le caractérisent, à la catégorie des espaces complexes (hormis les cas cités). Nous nous attarderons plus longuement sur ces questions dans [KIII].

Néanmoins, si π est donné avec un plongement de X dans Z lisse et de dimension relative $n + p$ sur S réduit, D.Barlet montre dans [B4] que la classe fondamentale relative de X sur S existe si et seulement si X est le support du graphe d'une famille analytique de n -cycles $(X_s)_{s \in S}$ de Z . De plus, cette construction est compatible aux changement de bases quelconques entre espaces complexes réduits quelconques. On peut proposer l'énoncé suivant, en apparence, sensiblement plus général:

Théorème 0. ([B4]) Soient S , Z et X des espaces analytiques complexes réduits installés dans le diagramme commutatif $X \xrightarrow{\sigma} Z \xrightarrow{q} S$ dans lequel q est lisse de dimension relative $n + p$, σ est un plongement local et π un morphisme continûment n -géométriquement plat (donc universellement n -équidimensionnel) muni d'une certaine pondération \mathfrak{X} .

Alors π est analytiquement n -géométriquement plat si et seulement si il existe une classe de cohomologie $C_{\pi, \mathfrak{X}}$ de $H_X^p(Z, \Omega_{Z/S}^p)$ vérifiant les propriétés suivantes: elle est de nature locale sur X et S , de formation compatible à l'additivité des pondérations et à tout changement de base entre espaces complexes réduits donnant, en particulier, pour chaque s fixé la classe fondamentale absolue du cycle $[\pi^{-1}(s)]$. De plus, si \mathfrak{X} est la pondération standard, $C_{\pi, \mathfrak{X}} = \mathcal{C}_{X/S}$ construite dans [B4].

Démonstration. Le lecteur désireux d’approfondir peut consulter [B4]. Nous présentons ici les arguments fondamentaux. Nous commencerons par quelques remarques d’ordre générales.

La version relative des théorèmes d’annulations de cohomologie de Siu- Trautmann ([S.T]) donnée dans [K1], *proposition* p.294 et assurant l’isomorphisme

$$H_X^p(Z, \Omega_{Z/S}^p) \simeq H^0(Z, \mathcal{H}_X^p(\Omega_{Z/S}^p))$$

permet de nous ramener à un problème local sur Z au voisinage de X et de supposer S irréductible. En effet, en raisonnant par récurrence sur la dimension de S et utilisant la variante relative de Siu-Trautmann, il est facile de voir que cette classe, si elle existe, est unique et entièrement déterminée par les points génériques des composantes irréductibles de S . Par ailleurs, pour tout recouvrement ouvert localement fini $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X que l’on peut choisir adapté à π (qui est universellement n -équidimensionnel) dans le sens où chacun de ses éléments est muni d’installation locale du type $(\spadesuit)_{\alpha \in A}$

$$\begin{array}{ccccc} X_\alpha & \xrightarrow{\sigma_\alpha} & Z_\alpha & & \\ & \searrow f_\alpha & \swarrow q'_\alpha & & \\ & & Y_\alpha & & \\ & \swarrow \pi_\alpha & \searrow q_\alpha & & \\ & & S & & \end{array}$$

où σ_α est un plongement local, π_α la restriction de π à X_α , Y_α lisse sur S et de dimension relative n , Z_α des espaces complexes lisses sur S de dimension relative $n + p$ ou ouvert de carte que l’on peut toujours supposer S -adapté dans le sens de **(1.0.2.2)**, f_α fini, ouvert et surjectif, q_α, q'_α et q''_α lisses, le morphisme canonique

$$H_X^p(Z, \Omega_{Z/S}^p) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} H_{X_\alpha}^p(Z_\alpha, \Omega_{Z_\alpha/S}^p)$$

est injectif. Ainsi, il nous suffit de construire un tel objet seulement localement en vérifiant ses principales propriétés dans cette situation.

◆ \Rightarrow :

Comme π est analytiquement géométriquement plat, il en est de même pour chaque π_α et f_α de la “décomposition” locale précédente. On peut, dès lors, supposer $Z := S \times U \times B$, $Y := S \times U$, $\pi := \pi_\alpha$ et S irréductible. Ayant localiser ainsi π autour de l’une quelconque de ses fibres tel qu’en **(1.0.3.2.1)**, on obtient diagramme

commutatif du type

$$\begin{array}{ccccc}
 & S \times U \times B & \xrightarrow{\tilde{F}:=F \times Id_B} & \text{Sym}^k(B) \times B & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 X & \nearrow & & \nwarrow & \\
 & S \times U & \xrightarrow{F} & \text{Sym}^k(B) & \\
 & \downarrow f & & \downarrow & \\
 & & & &
 \end{array}$$

$\text{Sym}^k(B) \# B$

Cela a pour effet immédiat de nous ramener à la situation universelle et à de la cohomologie équivariante pour laquelle on construit la classe fondamentale locale du sous espace d'incidence $\#$ dans $\text{Sym}^k(B) \times B$ qui est un élément $C_{\#}$ de $H_{|\#|}^p(\text{Sym}^k(B) \times B, \omega_{\text{Sym}^k(B) \times \mathbb{C}^p}^p)$ coïncidant génériquement (sur les points réguliers de $\#$) avec la classe fondamentale de la diagonale généralisée de $(B)^k \times B$. Rappelons que le faisceau $\omega_{\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)}^p$ que Barlet a appelé le faisceau des formes “truquées” n’est rien d’autre que l’image directe par l’application quotient $q : (\mathbb{C}^p)^k \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ du faisceau des formes holomorphes $\Omega_{\mathbb{C}^{kp}}^p$ dont on prend la partie σ_k -invariante, en d’autres termes :

$$\omega_{\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)}^p = (q_*(\Omega_{\mathbb{C}^{kp}}^p))^{\sigma_k}$$

Or, comme on est dans le cas d’une V-variété, ce faisceau coïncide avec le faisceau \mathcal{L}^p des p formes méromorphes se prolongeant analytiquement sur toute désingularisée de ladite V-variété. Mais ce faisceau a la propriété d’être stable par image réciproque quelconque entre espaces complexes, d’où morphisme $\tilde{F}^* \omega_{\text{Sym}^k(B) \times B}^p \rightarrow \mathcal{L}_{S \times U \times B}^p$. Alors, utilisant la projection naturelle $\mathcal{L}_{S \times U \times B}^p \rightarrow \mathcal{L}_S^p \otimes \Omega_{U \times B}^p$ et l’analyticité géométrique de la pondération assurant que la variation en le paramètre est holomorphe, on en déduit une image réciproque plus précise à savoir $\tilde{F}^* \omega_{\text{Sym}^k(B) \times B}^p \rightarrow \Omega_{U \times B/S}^p$.

Ainsi, C_{Δ} fournira par image réciproque par \tilde{F} un élément de $H_X^p(S \times U \times B, \Omega_{/S}^p)$ qui coïncide aux points génériques de X (et donc aux point réguliers de π) avec la classe fondamentale usuelle d’une sous variété lisse.

On aura alors, par recollement, un objet global $C_{\pi, \mathfrak{X}}$ de $H_X^p(Z, \Omega_{Z/S}^p)$ dont on vérifie aisément les propriétés fondamentales.

◆ \Leftarrow : Supposons donnée une telle classe $C_{\pi, \mathfrak{X}}$ pour π et un recouvrement ouvert $(X_{\alpha})_{\alpha \in a}$ de X comme précédemment défini. Il nous faut montrer que cette classe induit, pour toute projection finie $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow S \times U_{\alpha}$, un morphisme trace $T_{f_{\alpha}}^0 : f_{\alpha*} \mathcal{O}_{X_{\alpha}} \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U_{\alpha}}$ se prolongeant en un morphisme d’algèbres graduées

$$\mathcal{T}_{f_\alpha}^\bullet : f_{\alpha*} \Omega_{X_\alpha/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{S \times U_\alpha/S}^\bullet.$$

En omettant les indices et en insérant ces morphismes finis et surjectifs dans le diagramme $X \xrightarrow[\quad f]{\sigma} Z \xrightarrow{\quad q'} Y$, la construction de ces traces repose essentiellement

sur une formule intégrale de type Cauchy. En effet, on utilise une forme particulière de l'intégration sur les cycles consistant à intégrer des classes de cohomologie de type (p, p) à support dans X (elle peut aussi être vue comme un morphisme **résidu**). Plus précisément, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f_* \mathcal{O}_X & \xrightarrow{C_{\pi, \mathfrak{x}}} & f_* \mathcal{H}_X^p(\Omega_{Z/S}^p) \\ & \searrow \tau_f & \downarrow \phi \\ & & \mathcal{O}_Y \end{array}$$

dans lequel τ_f^0 est le morphisme trace recherché, la flèche horizontale est le cup-produit par la classe fondamentale $C_{\pi, \mathfrak{x}}$ et ϕ le morphisme d'intégration.

Il faut simplement intégrer sur une famille dont les supports rencontrent X en des fermés S -propres de Z . Pour cela, on se ramène à intégrer sur la famille analytique triviale $(s \times t \times B_i)_{(s,t) \in S_i \times U_i}$; ce qui nous donne une fonction holomorphe sur $S_i \times U_i$. On pose, alors, pour toute fonction holomorphe f sur X ,

$$\mathcal{T}_{E,S}(f) = \int_{Y_s} f \cdot \mathcal{C}(X_E/S) \quad \blacksquare$$

V. Quelques petits résultats utiles.

Lemme 5.0. ([E], p.75)

Soient \mathcal{A} un anneau et \mathcal{B} une algèbre finie et de Tor-dimension finie sur \mathcal{A} . Il existe un morphisme trace de \mathcal{A} -modules $Tr : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, défini comme suit: si \mathcal{P}^\bullet est une résolution projective finie de \mathcal{B} sur \mathcal{A} , on fait correspondre à tout élément b de \mathcal{B} un morphisme $b_\bullet : \mathcal{P}^\bullet \rightarrow \mathcal{P}^\bullet$ induisant la multiplication par b dans \mathcal{B} et on pose $Tr(b) = \sum_i (-1)^i Tr(b_i)$. Cette trace commute aux changements de base cohomologiquement transversaux au morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, elle est stable par composition de morphismes de Tor-dimension finie c'est-à-dire que pour tout morphisme $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ de Tor-dimension finie, on a $Tr_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} = Tr_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \circ Tr_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$, et elle coïncide avec la trace usuelle dans le cas plat.

Lemme 5.1. ([E], §4.4, lemme 1, p 60) Soient Z, X, Y et S des variétés munies d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\sigma} & Z \\
 & \searrow f \quad \swarrow q' & \\
 & Y & \\
 \pi \swarrow & \downarrow q' & \searrow q \\
 & S &
 \end{array}$$

avec q, q', q'' lisses de dimension relatives respectives $n + p, p$ et n , σ plongement fermé et f quasi-fini et séparable en un point générique x d'une fibre X_s (autour de laquelle a lieu cette factorisation). Soit (t_1, \dots, t_n) des éléments de $\mathcal{O}_{Z,x}$ fournissant une suite régulières de paramètres dans $\mathcal{O}_{X_s,x}$. Alors,

- (i) $\Omega_{X/S,x}^n = \sum_J \mathcal{O}_{X,x} dt^J \wedge \Omega_{Z/S,x}^n$ pour tout ensemble d'indice J de longueur $j \leq n$
- (ii) Il existe une famille finie $f_\alpha : X \rightarrow Y$ de morphismes quasi-finis et séparables en x telle que l'on ait $\Omega_{X/S,x}^n = \sum_\alpha (f_\alpha^* \Omega_{Z/S}^n)_x$

Lemme 5.2. ([E], lemme III.1.2, p83) Passage des projections linéaires aux projections quelconques.

Soient $(l_i)_{i \in I}$ une famille finie de S -morphismes linéaires dont les membres sont des composantes de S -morphismes linéaires $Z \rightarrow Y$ finis sur X au dessus de Y , k_i des entiers et $\alpha_i^j \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ pour $j \in \{1, \dots, n + p\}$ presque partout nulles. Alors le morphisme $\Psi : Z \rightarrow Y$ de composantes $\psi_j := \sum_i \alpha_i^j l_i^{k_i}$ est fini sur Y et induit un morphisme trace sur Y .

Lemme 5.3. Soit $\pi_0 : \mathbb{C}^{n+p} \rightarrow \mathbb{C}^n$ la projection canonique. Pour $u \in L(\mathbb{C}^{n+p}, \mathbb{C}^n)$, on pose $\pi_u := \pi_0 + u$. Alors, pour tout couple d'entiers proposition (a, b) vérifiant $a \leq n$ et $b \leq n$ et tout voisinage Ω_0 de 0 dans $L(\mathbb{C}^{n+p}, \mathbb{C}^n)$, on a:

$$\Lambda^{a,b}(\mathbb{C}^{n+p}) = \sum_{u \in \Omega_0} \pi_u^* [\Lambda^{a,b}(\mathbb{C}^n)^*]$$

où $\Lambda^{a,b}(E)^*$ désigne, pour un espace vectoriel E sur \mathbb{C} , l'espace des formes a -linéaires et b -antilinéaires alternées sur E .

Ce lemme montre que si X est un sous ensemble analytique de dimension pure n dans \mathbb{C}^{n+p} , sur lequel π_0 induise un revêtement ramifié d'un certain degré k , alors il existe un ouvert dense V_0 de la grassmannienne $\mathcal{G}(n+p, n)$ tel que, pour tout $u \in V_0$, π_u soit encore un revêtement ramifié de degré k_u .

Références bibliographiques

- [Ang] Angéniol B., Familles de cycles algébriques—Schémas de Chow. Lecture Notes in Mathematics. 896, Springer Verlag, (1981).
- [A.E] Angéniol B, Elzein F., La classe fondamentale relative d'un cycle, Bull.Soc.Math.France Mem 58 (1978) 63—93.
- [A.N] Andreotti A., Norguet F., La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique, Ann. Sc. Norm. Pisa, tome 21, (1965), 811—842.
- [A.K] Andreotti A., Kaas A. Duality on complex spaces, Ann. Sc. Norm. Pisa, tome 27, (1973) 187—263.
- [A.S] Andreotti A., Stoll W., Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions. Lecture Notes in Mathematics, 234. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1971).
- [B1] Barlet D., Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique réduit, Sémin. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics. 482, Springer Verlag, (1975) 1—158.
- [B2] Barlet D. Faisceau ω_X^\vee sur un espace analytique de dimension pure, Sémin. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics 670, Springer Verlag, (1978) 187—204.
- [B3] Barlet D. Convexité au voisinage d'un cycle. Sémin. François Norguet-Lecture Notes in Mathematics 807, Springer-Verlag, (1977-1979), p.102—121.
- [B4] Barlet D., Famille analytique de cycles et classe fondamentale relative, Sémin. F. Norguet-Lecture Notes in Mathematics 807, Springer Verlag, (1980) 1—24.
- [B5] Barlet D., Majoration du volume des fibres génériques et forme géométrique du théorème d'applatissage. Séminaire P. Lelong-H. Skoda. Lecture Notes in Mathematics 822, Springer verlag, (1980), p.1—17
- [B.M] Barlet D., Magnusson J., Integration de classes de cohomologie méromorphes et diviseur d'incidence, Ann. sc. de l'E.N.S: Série 4, tome 31 fasc. 6, (1998) 811—842.
- [B.V] Barlet D., Varouchas J. Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles, Bulletin de la Société Mathématique de France 117, (1989) 329—341
- [E] Elzein F., Complexe dualisant et applications à la classe fondamentale d'un cycle, Bull.Soc.Math.France Mem 58 (1978).
- [E1] Elzein F., Comparaison des résidus de Grothendieck et de Herrera. C.R.Acad.Sc. Paris, 278, (1974), p.863—866
- [C] Cassa A., The Topology of the Space of Positive Analytic Cycles. Annali di Math.Pura.Appl, tome 112, 1 (1977) p1—12.
- [E.G.A.4] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas III. Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math 28, (1966).
- [Fi] Fischer G., Complex Analytic Geometry. Lect.Notes.Math 538, Berlin Heidelberg New York, Springer (1976).
- [Fu] Fujiki A., Closedness of the Douady Spaces of compact Kähler Spaces. Publ.Rims, Kyoto-Univ, tome 14, (1978) p1—52.
- [G1] Grothendieck A., Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki 149 (1957).
- [Go] Golovin V.D., On the homology theory of analytic sheaves, Math.USSR.Izvestija 16,(2) (1981), p239—260.
- [G-R] Grauert H, Riemenschneider O., Verschwindungssatz für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. Invent. Math. 11 (1970), p.263—292.
- [G.R1] Grauert H., Remmert R., Komplexe Räume. Math.Ann 136, (1958), p245—318.
- [G.R2] Grauert H., Remmert R., Coherent analytic sheaves. Grundlehren Math.Wiss, Bd 265, Berlin Heidelberg New York, Springer (1984).
- [Gri] Griffiths P., Variations on a theorem of Abel. Invent.Math 35(1976), p321—390.

- [Gr.H] Griffiths P, Harris J., Principles of algebraic geometry. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, Inc, New York, 1994.
- [G.R.P] Remmert R., Local Theory of Complex Spaces. Several Complex Variables VII, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 74, Springer-Verlag, p.7—96
- [H] Harvey F.Reese.,Integral formulae connected by Dolbeault’s isomorphism. Rice.Univ.Studies 56,(n2), (1970) p77—97.
- [Ha] Hartshorne R.,Residues and Duality. Lect. Notes in Mathematics 20, (1966), Springer-Verlag, Heidelberg.
- [H.L] Herrera M, Libermann D.,Residues and principal values on complex spaces. Math. Ann 194, (1971),p. 259—294.
- [H.S] Hübl R, Sastry P., Regular differential forms and relative duality. American Journal of Mathematics 115, (1993), p.749—787.
- [K1] Kaddar M.Classe fondamentale relative en cohomologie de Deligne et application. Math.Ann, 306,(1986),p285—322.
- [K2] Kaddar M., Intégration d’ordre supérieure sur les cycles en géométrie analytique complexe, Ann. Sc. Norm. Pisa Cl.Sci(4), tome 29, (2000) 187—263.
- [Ke] Kersken M.,Der Residuencomplex in der lokalen algebraischen und analytischen Geometrie, Math.Ann 265,(1983) 423—455.
- [Ke1] Kersken Reguläre Differentialformen. Manus. Math 46, (1984), p 1—25.
- [Ke2] Kersken Some Applications of the trace mapping for differentials. Topis in Algebra. Banach Center Publications 26 (2), (1990), p141—148.
- [K.W] Kunz E, Waldi R., Regular differential forms, Contemporary Mathematics 79, (1988), Amer.Math.Soc., Providence.
- [Ki] Kiehl R., Äquivalenzrelationen in analytischen Räumen. Math.Zeit. (1968), p.1—20
- [Kl] Kleiman, Steven L., Relative duality for quasicoherent sheaves, Compositio.Math. 41 (1980),(1) 39—60.
- [Ku1] Kunz E., Holomorphe Differentialformen auf Algebraischen Varietäten mit Singularitäten I. Manuscripta.Math 15,(19750, p.91—108.
- [Ku2] Kunz E., Holomorphe Differentialformen auf Algebraischen Varietäten mit Singularitäten I. Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 47,(1978), p.42—70.
- [Ku3] Kunz E., Residuen von Differentialformen auf Cohen Macaulay Varietäten mit Singularitäten I. Math. Zeitschrift 152,(1977), p.165—189.
- [L] Lipman J., Dualizing sheaves, differentials and residues on algebraic varieties, Asterisque 117, (1984).
- [L.J] Lejeune-Jalabert M., Le théorème “ $AF + BG$ ” de Max Noether. Seminar on Singularities (Paris, 1976/1977), pp. 97—138, Publ. Math. Univ. Paris VII, 7, Univ. Paris VII, Paris, 1980.
- [L.S] Lipman J, Sastry P., Residues and duality for Cousin complexes, Preprint.
- [Lo] Lojasiewicz S.,Introduction to Complex Analytic Geometry, Birkhäuser, Basel,(1991).
- [Ma] Mathieu D., Universal reparametrizationof family of analytic cycles: a new approach to meromorphic equivalence relations. Anales de l’Inst.Fourier 50 (44),(2000) p1115—1189.
- [Mo] Mochizuki N., Quasi-normal analytic spaces, Proc.Japan Acad., 48, (1972), p.181—185.
- [Par] Parusinski A., Constructibility of the set of points where a complex analytic morphism is open. Proc.Amer.Math.Society. 117(1), (1993),p205—211.
- [R] Reiffen H.J., Riemmansche Hebbartkeitssätze für Kohomologieklassen mit kompaktem Träger, Math.Ann 164, (1966) 272—279.
- [R.R] Ramis J.P, Ruget G., Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe. Publ. Math de l’IHES., 38, (1970), p77—91.
- [RRV] Ramis J.P, Ruget G, Verdier J.L., Dualité relative en géométrie analytique complexe, Invent.Math 13 (1971) 261—283.

- [Re] Remmert R., Holomorphe und meromorphe Abbildung komplexer Räume. Math. Ann. 133, (1957), p 286—319.
- [Si] Siebert B., Fiber cycles of holomorphic maps I-II, Math. Ann 296 et 300, (1993, 1994), p269—283, p243—271.
- [V] Verdier J.L. Base change for twisted inverse image of coherent sheaves, Internat. Colloq, Tata Inst. Fund. Res, Bombay, (1968) 393—408.
- [Y] Yekutieli A., Smooth formal embeddings and the residue complex. Canad. J. Math. 50, (1998), (4), p.863—896.

M. Kaddar,
Institut Elie Cartan, UMR 7502
Université Nancy 1, BP 239
Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex. France.
e-mail: kaddar@iecn.u-nancy.fr